Chapitre 1

Suites et séries d'applications - Approximation uniforme

Dans tout le chapitre, $\mathcal{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ (ou plus généralement d'un espace métrique) et E un espace vectoriel normé (dans la pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Rappels et compléments sur les séries alternées

Théorème 1.1 (Théorème de Abel) *Soient (a_n) une suite de réels et (b_n) une suite de complexes. On suppose que:*

- *la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0,*
- *il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous entiers naturels $n \leq m$ on ait $\left|\sum_{p=n}^{m} b_p\right| \leq K$,*

Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Démonstration: Posons $B_{n,m} = \sum_{p=n}^{m} b_p$. On a alors $b_n = B_{n,n}$, $b_{n+1} = B_{n,n+1} - B_{n,n}$, et ainsi de suite jusqu'à $b_m = B_{n,m} - B_{n,m-1}$ d'où (**transformation d'Abel**)

$$a_n b_n + \cdots + a_m b_m = B_{n,n}(a_n - a_{n+1}) + B_{n,n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + B_{n,m-1}(a_{m-1} - a_m) + B_{n,m} a_m$$

La suite (a_n) étant décroissante, pour tout p, $a_p - a_{p+1} \geq 0$ et bien sûr aussi $a_m \geq 0$. D'autre part, par hypothèse, $\forall q \geq n$, $|B_{n,q}| \leq K$, donc :

$$|a_n b_n + \cdots + a_m b_m| \leq K[(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{m-1} - a_m) + a_m] = K a_n$$

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence vers 0 de la suite (a_n) entraîne l'existence d'un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $0 \leq a_n \leq \frac{\varepsilon}{K}$ et la série $\sum a_n b_n$ vérifie donc le critère de Cauchy. $\square$

Exemple. Pour tout réel x, la série $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Niels Henrick Abel (1802-1829), grand mathématicien norvégien, mit en défaut en 1826 le théorème de Cauchy, énoncé en 1821 dans son *Cours d'analyse*, selon lequel si les f_n sont continues au point x_0 et si la série $\sum f_n(x)$ converge dans un voisinage V de x_0 alors la limite f ainsi définie dans V est continue en x_0.

On peut alors en déduire, ou démontrer de manière directe :

Proposition 1.2 (Critère spécial des séries alternées ou encore critère de Leibniz) *Soit $\sum u_n$ une série réelle alternée (c.a.d. telle que le signe de $(-1)^n u_n$ soit indépendant de n). Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0 alors la série alternée $\sum u_n$ est convergente.*
En outre, dans ce cas, le reste d'ordre n est du signe de son premier terme et est, en valeur absolue, majoré par la valeur absolue de celui-ci.

Démonstration: Supposons par exemple que $(-1)^n u_n$ soit toujours positif.
Posons $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. On a $S_{2(n+1)} - S_{2n} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n+2}| \leq 0$ car la suite $(|u_n|)$ est décroissante. On en déduit que la suite (S_{2n}) est décroissante. De même, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geq 0$ donc la suite (S_{2n+1}) est croissante. D'autre part, $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}| \longrightarrow 0$ donc les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
Leur limite commune S est telle que pour tout n, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$ et donc

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = |u_{2n+2}|$$

et de même, $0 \geq R_{2n} = S - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -|u_{2n+1}|$. □

Exemple. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Remarque. Cette proposition ne donne qu'une condition <u>suffisante</u> de convergence d'une série alternée. Ainsi la série alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ converge (le démontrer) mais ne vérifie pourtant pas ce critère.
On prendra garde également à ne pas majorer le reste d'une série alternée convergente sans avoir au préalable vérifié les hypothèses de cette proposition.

Gottfried Wilhelm Leiniz (1646-1716), philosophe et savant allemand, est l'inventeur (en même temps que Newton) en 1686 du *calcul différentiel et intégral*. Il se consacra également au développement en série des fonctions.

1.2 Suites d'applications

1.2.1 La convergence simple

Définition 1.3 *Soient (f_n) une suite d'applications de $\mathcal{D}$ dans E et x_0 un point de $\mathcal{D}$. On dit que la suite (f_n)* **converge simplement** *en x_0 si la suite vectorielle $(f_n(x_0))$ est convergente dans E. La limite est alors notée $f(x_0)$. Cela revient à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0, \forall n > n_0, \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad (n_0 \textit{ dépend de } \varepsilon \textit{ et de } x_0)$$

Exemple. Soit f_n, nulle sur $[\frac{2}{n}, +\infty[$ et définie par $f_n(x) = n^2x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = -n^2x + 2n$ si $x \geq \frac{1}{n}$. On a $\forall n$, $f_n(0) = 0$ et pour $x_0 \neq 0$, $\forall n > n_0 = \frac{2}{x_0}$, $f_n(x_0) = 0$ donc la suite (f_n) converge simplement vers 0 en tout x de $[0, +\infty[$.

On dit que la suite (f_n) **converge simplement sur $\mathcal{D}$** si elle converge en tout point x_0 de $\mathcal{D}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathcal{D}, \exists n_0 > 0, \forall n > n_0, \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad (n_0 \text{ dépend de } \varepsilon \text{ et de } x_0)$$

On définit alors point par point l'application limite par $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Remarque. Cette notion de convergence n'a aucune propriété satisfaisante. Par exemple, la suite de fonctions continues $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction non continue f définie par $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$.
De même, la suite de fonctions intégrables $f_n : x \mapsto nx(1 - x^2)^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle f mais on a $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{n}{2(n+1)}$ et par suite $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.
On est donc amené à introduire d'autres types de convergence, notamment en choisissant d'autres normes. Par exemple, on dira qu'une suite (f_n) de fonctions intégrables sur I *converge en moyenne* vers f sur I si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ où $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$. On dira de même qu'une suite (f_n) de fonctions de carrés intégrables sur I *converge en moyenne quadratique* vers f sur I si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ où $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_I |f(t)|^2\,dt}$.
Mais c'est en fait la "norme infinie" définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f(x)\|$ qui va nous intéresser tout particulièrement.

1.2.2 La convergence uniforme

Définition 1.4 *On dit que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathcal{D}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_u > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \forall n > n_u, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad (n_u \textit{ ne dépend que de } \varepsilon)$$

Cela revient à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_u > 0, \forall n > n_u, \sup_{x\in\mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \textit{ou encore} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

Propriété. Si la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathcal{D}$ alors elle converge simplement sur $\mathcal{D}$.
Démonstration: Cela résulte du fait que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\|$. □

Remarque. Pour $f : \mathcal{D} \to E$ bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f(x)\|$. $\|.\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel des applications bornées de $\mathcal{D}$ dans E.

Exercice 1.1 Montrer que la limite uniforme de fonctions bornées est une fonction bornée.

Interprétation géométrique.

Dire que la suite de fonctions numériques (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ signifie que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_u > 0$, $\forall n > n_u$, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ c'est à dire qu'à partir du rang $n_u + 1$, toute la courbe $y = f_n(x)$ est dans la bande $f(x) - \varepsilon$, $f(x) + \varepsilon$.

Exemple. Si $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$, la suite (f_n) converge simplement vers f donnée par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ mais l'est sur tout intervalle $[0, \alpha]$ de $[0, 1]$.

1.2.3 Méthodes pratiques

Démonstration de la convergence uniforme

Première méthode.
- On détermine point par point l'application f en étudiant pour x fixé la limite de $f_n(x)$.
- On détermine $\sup_{x \in \mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\|$ par étude d'une fonction positive (n fixé, $x \in \mathcal{D}$).
- On montre enfin que $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

Deuxième méthode.
Pour qu'une expression positive tende vers 0, il suffit qu'une expression majorante le fasse.
Donc : - On détermine comme précédemment f.
- On cherche une majoration valable sur $\mathcal{D}$ de $\|f_n(x) - f(x)\|$ de la forme : $\forall x \in \mathcal{D}$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq g_n(x)$.
- On vérifie que $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathcal{D}} g_n(x) = 0$.

Remarques.
- Cette dernière condition est uniquement suffisante.
- L'idéal est de trouver comme majoration une fonction indépendante de x (pour éviter la recherche du sup) c'est à dire une suite positive.

Troisième méthode.
Utiliser le théorème de Cauchy.

Démonstration de la non convergence uniforme

Première méthode.

- On détermine point par point l'application f en étudiant pour x fixé la limite de $f_n(x)$.
- On détermine $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\|$ par étude d'une fonction positive (n fixé, $x \in \mathcal{D}$).
- On montre enfin que $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\|$ ne tend pas vers 0.

Deuxième méthode.

Pour qu'une expression positive ne tende pas vers 0, il suffit qu'une expression minorante ne le fasse pas. Donc :
- On détermine comme précédemment f.
- On trouve x_n dans $\mathcal{D}$ (dépendant ou non de n) tel que $\|f_n(x_n) - f(x_n)\|$ ne tende pas vers 0. On n'a alors pas convergence uniforme sur $\mathcal{D}$ $\left(\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_n(x) - f(x)\| \geq \|f_n(x_n) - f(x_n)\|\right)$.

Troisième méthode.

Utiliser le théorème sur la continuité.

1.2.4 Théorème de Cauchy

Théorème 1.5 (Critère de Cauchy) *Si E est complet alors la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_c > 0, \forall p > n_c, \forall q > n_c, \sup_{x\in\mathcal{D}} \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$$

Démonstration:

- Condition nécessaire : la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathcal{D}$ donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier $n_u > 0$ tel que $\forall p > n_u, \sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_p(x) - f(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\forall q > n_u, \sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_q(x) - f(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ d'où le résultat puisque :
  $\forall x \in \mathcal{D}, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$.

- Condition suffisante : on commence par montrer la convergence simple. Soit $x_0 \in \mathcal{D}$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_c > 0, \forall p > n_c, \forall q > n_c, \|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| \leq \sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$.
  La suite $(f_n(x_0))$ est donc de Cauchy sur E et converge donc vers $f(x_0)$. On a donc bien convergence simple sur $\mathcal{D}$.
  Montrons maintenant que la convergence est uniforme. Par hypothèse, pour tout x de $\mathcal{D}$, $\forall p > n_c, \forall q > n_c, \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$. Fixons alors p et faisons tendre q vers l'infini. On obtient : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall p > n_c, \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ et donc, par passage à la borne sup, $\forall p > n_c, \sup\limits_{x\in\mathcal{D}} \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ d'où le résultat.

. $\square$

1.2.5 Continuité

Théorème 1.6 *Si à partir d'un certain rang toutes les (f_n) sont continues en $x_0 \in \mathcal{D}$ et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathcal{D}$ alors f est continue en x_0.*

Démonstration: D'après la convergence uniforme, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_u > 0$, $\forall n > n_u$, $\forall x \in \mathcal{D}$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. D'autre part, pour $n > n_0$, f_n est continue en x_0. Fixons alors un entier N supérieur à $\sup(n_0, n_u)$.
$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))$ et donc $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(x_0)\| + \|f_N(x_0) - f(x_0)\|$. Puisque $N > n_u$, on en déduit donc $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 2\varepsilon + \|f_N(x) - f_N(x_0)\|$. Or, la continuité de la fonction f_N en x_0 prouve que pour ce ε fixé,

$$\exists \eta_N > 0,\ \|x - x_0\| \leq \eta_N \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon \qquad \square$$

Remarques.

- Démonstration de non convergence uniforme. Si (à partir d'un certain rang) les f_n sont continues en x_0 et si f n'est pas continue en x_0 alors x_0 ne peut appartenir au domaine de convergence uniforme.

- Ecriture. Sous les hypothèses précédentes, on a donc :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

  En effet, $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$ (convergence simple en x_0) donc $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$ (continuité de f_n). D'autre part, $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$.

- Ce dernier résultat n'a rien de clair à priori puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1} x^n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} \lim_{n \to +\infty} x^n = 0$$

- Généralisation. Si pour λ tendant vers λ_0 la famille de fonctions (f_λ) converge uniformément vers f sur $\mathcal{D}$ alors : $\lim_{x \to x_0} (\lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(x)) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lim_{x \to x_0} f_\lambda(x))$.

Exercice 1.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to E$ des applications continues sur I. Montrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de I alors f est continue sur I.

Proposition 1.7 (Extension du théorème de continuité) *Si à partir d'un certain rang toutes les f_n admettent une limite ℓ_n en $x_0 \in \overline{\mathcal{D}}$, si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathcal{D}$ et si E est complet alors la suite (ℓ_n) converge vers ℓ et f admet ℓ pour limite en x_0 :*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$.
D'après le critère de Cauchy, $\exists n_0, \forall p, q > n_0, \forall x \in \mathcal{D}, \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$ et donc en passant à la limite, $\|\ell_p - \ell_q\| \leq \varepsilon$. La suite (ℓ_n) est donc de Cauchy dans E complet donc elle converge vers un certain ℓ. On en déduit : $\exists n_1, \forall n > n_1, \|\ell_n - \ell\| < \varepsilon/3$. D'autre part, la suite (f_n) convergeant uniformément vers f, $\exists n_2, \forall n > n_2, \forall x \in D, \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon/3$. En posant $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, l'existence de la limite de f_{n_3} assure l'existence d'un voisinage V de x_0 tel que : $\forall x \in V \cap D, \|f_{n_3}(x) - \ell_{n_3}\| < \varepsilon/3$. Finalement,

$$\forall x \in V \cap D, \|f(x) - \ell\| \leq \|f(x) - f_{n_3}(x)\| + \|f_{n_3}(x) - \ell_{n_3}\| + \|\ell_{n_3} - \ell\| < \varepsilon$$

□

1.2.6 Intégration d'une suite de fonctions de la variable réelle

Théorème 1.8 *Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est fermé borné, si à partir d'un certain rang toutes les $f_n : [a, b] \to E$ sont continues sur $[a, b]$, et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$.*

Démonstration: Les hypothèses impliquent que f est continue donc intégrable sur $[a, b]$. $\| \int_a^b (f_n(t) - f(t))\, dt\| \leq \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|\, dt \leq \sup\limits_{t \in [a,b]} \|f_n(t) - f(t)\|(b - a)$ d'où le résultat d'après la convergence uniforme des f_n. □

Remarques.
-Ce théorème ne donne qu'une condition suffisante d'interversion des limites. Lorsqu'il ne s'applique pas, on cherche à montrer de manière directe que $\int_a^b (f_n(t) - f(t))\, dt$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par exemple, la suite de fonctions (f_n) où $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est donnée par $f_n(x) = 2nx$ si $x \in [0, \frac{1}{2n}]$, $f_n(x) = 2 - 2nx$ si $x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ converge simplement (mais non uniformément) vers la fonction nulle et on a tout de même $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = 0$ (le vérifier).
- Le théorème d'intégration est en défaut si l'intervalle n'est pas compact. Si, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction constante égale à $\frac{1}{n}$ sur $[n^2, (n+1)^2]$ et nulle en dehors, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = 2$ (le vérifier).

Généralisation

Pour x dans $[a, b]$, on pose $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$ et $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. On obtient ainsi une suite de fonctions.

- Convergence simple. Sous les hypothèses précédentes, la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers g sur $[a, b]$.

- Convergence uniforme. Si $[a,b]$ est fermé borné, si à partir d'un certain rang toutes les (f_n) sont continues sur $[a,b]$, et si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

  Démonstration: $\|g_n(x) - \int_a^x f(t)\,dt\| \leq \int_a^x \|f_n(t) - f(t)\|\,dt \leq \|f_n - f\|_\infty (x-a)$ et donc $\sup_{x\in[a,b]} \|g_n(x) - \int_a^x f(t)\,dt\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\|(b-a)$ d'où le résultat. □

Remarques.

- La démonstration du théorème 1.8 ne nécessite pas vraiment la continuité des f_n : il suffit que ces fonctions soient intégrables ainsi que leur limite f.

- Sous les hypothèses du théorème 1.8 on peut donc écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$$

- On peut généraliser à une famille (f_λ). Si pour λ tendant vers λ_0 la famille de fonctions continues sur $[a,b]$ (f_λ) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_a^b f_\lambda(t)\,dt = \int_a^b \lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t)\,dt$$

1.2.7 Dérivation d'une suite de fonctions de la variable réelle

Théorème 1.9 *Si $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est fermé borné, si à partir d'un certain rang toutes les $f_n : [a,b] \to E$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$, si la suite (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ et si la suite (f_n) converge simplement en au moins un x_0 de $[a,b]$ alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, f est de classe C^1 et $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

Démonstration: On écrit $f_n(x) = \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)$ et on applique le théorème d'intégration. Cela donne la convergence simple de f_n vers f où $f(x) = \int_{x_0}^x h(t)\,dt + A$ (avec $A = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$).
Etudions la convergence uniforme. $f_n(x) - f(x) = \int_{x_0}^x (f_n'(t) - h(t))\,dt + f_n(x_0) - A$ donc $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \int_a^b \|f_n'(t) - h(t)\|\,dt + \|f_n(x_0) - A\|$ et donc, par passage au sup, $\sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f_n'(x) - h(x)\|(b-a) + \|f_n(x_0) - A\|$ d'où le résultat.
On conclut en disant que h est continue donc f dérivable et $f'(x) = h(x)$. □

Remarque. Pour échanger limite et dèrivée, la convergence uniforme de la suite (f_n) est insuffisante.

Exemple. Soit $f_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(3^n x)$. On a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ et la suite (f_n) converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Or $f_n'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos(3^n x)$ n'a pas de limite.

1.2.8 Remarque importante

Comme pour la continuité, pour montrer la dérivabilité sur un intervalle I (par exemple $[0,+\infty[$, $]a,b[$) de la limite d'une suite de fonctions, on peut utiliser le théorème précédent en remplaçant $[a,b]$ par I et l'hypothèse de convergence uniforme sur $[a,b]$ par une hypothèse de convergence uniforme sur tout compact de I.
Cela tient encore au fait que, tout comme la continuité, la dérivabilité est une notion ponctuelle.

1.3 Séries d'applications

On considère une suite (f_n) d'applications de D dans E et on étudie la série de terme général f_n. On pose $S_n = f_0 + \cdots + f_n$. S_n est donc l'application définie sur D par : $S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$. Dans tout le paragraphe, x_0 désignera un élément de D.

1.3.1 Les convergences

Convergence simple

On dit que la série (f_n) *converge simplement* en x_0 si la suite vectorielle $(S_n(x_0))$ est convergente dans E. Cela revient à dire que la série de terme général $f_n(x_0)$ est convergente.
On note alors $S(x_0) = \lim S_n(x_0)$. On définit alors aussi le *reste d'ordre* n en x_0 : $R_n(x_0) = S(x_0) - S_n(x_0) = \lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+1}(x_0)\cdots + u_{n+p}(x_0)$.
On dit que la série (f_n) *converge simplement* sur D si elle converge simplement en tout x_0 de D. S est alors définie point par point sur D.

Convergence absolue

On dit que la série (f_n) *converge absolument* en x_0 si la série $(\|f_n(x_0)\|)$ est convergente dans E. On est donc, pour ce type de convergence, ramené à l'étude d'une série positive.

Remarque. La convergence absolue en x_0 entraîne la convergence simple en x_0.

Convergence uniforme

On dit que la série (f_n) *converge uniformément* sur D si la suite (S_n) converge uniformément sur D. Cela revient donc à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in D} \|R_n(x)\| = 0$.

Attention : La convergence uniforme sur D **n'entraîne pas** la convergence absolue sur

D. Par exemple, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}$ ne converge absolument en aucun x réel mais cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ (le vérifier).

1.3.2 Méthodes pratiques

Démonstration de la convergence uniforme

Utilisation du reste.

- On commence par établir la convergence simple sur D. On peut alors parler de $S_n(x)$ et de $R_n(x)$.
- On démontre alors que $R_n(x)$ converge uniformément vers 0 soit en cherchant $\sup_{x\in D}\|R_n(x)\|$ (rare) soit en cherchant une majoration de $\|R_n(x)\|$: si on a $\forall x \in D$, $\|R_n(x)\| \leq g_n(x)$, il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} g_n(x) = 0$.

Méthode terme à terme.

Définition 1.10 *On dit que la série (f_n) converge normalement sur D s'il existe une série positive convergente (u_n) telle que $\forall x \in D$, $\|f_n(x)\| \leq u_n$. Cela revient à dire que la série positive $\sum \sup_{x\in D} \|f_n(x)\|$ est convergente.*

Propriété. La convergence normale sur D entraîne la convergence uniforme et la convergence absolue sur D.
Démonstration: Montrons la convergence absolue. Par hypothèse, la série (u_n) est majorante de la série positive $(\|f_n(x)\|)$ qui converge donc pour tout x de D.
Montrons la convergence uniforme. On a, pour tout x de D,

$$\|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\| \leq u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$$

et donc à la limite, $\|R_n(x)\| \leq (R_n)_u$ d'où $\sup_{x\in D}\|R_n(x)\| \leq (R_n)_u$. Le résultat découle alors du fait que le reste d'une série convergente tend vers 0. □

Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple, si, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n constante égale à $\frac{1}{n+1}$ sur $[n, n+1[$ et nulle en dehors alors la série de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers $S : x \mapsto \frac{1}{E(x)+1}$ mais la convergence n'est pas normale (le vérifier).

Critère de Cauchy

Théorème 1.11 *Si E est complet, la série (f_n) converge uniformément sur D si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_c \in \mathbb{N}, \forall n > n_c, \forall p \in \mathbb{N}, \sup_{x\in D} \|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\| < \varepsilon$

Démonstration: Cela résulte du critère de Cauchy pour la suite (S_n). □

Démonstration de non convergence uniforme

- On peut montrer que $\sup_{x\in D}\|R_n(x)\|$ ne tend pas vers 0, par exemple en trouvant une suite (x_n) de D telle que $\|R_n(x_n)\|$ ne tende pas vers 0.
- Si le terme général $f_n(x)$ ne tend pas uniformément vers 0 (en particulier si on trouve une suite (x_n) de D telle que $f_n(x_n)$ ne tende pas vers 0), alors la série (f_n) ne converge pas uniformément sur D. (Cela résulte du critère de Cauchy.)

1.3.3 Continuité de la somme

On suppose que la série (f_n) converge simplement sur D. On définit alors point par point la fonction somme S. On remarque que si les f_n sont continues, alors S_n l'est aussi. On déduit du théorème de continuité d'une suite d'applications :

Théorème 1.12 *Si les f_n sont continues en le point x_0 de D et si la série (f_n) converge uniformément sur D alors S est continue en x_0. On peut alors écrire :*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Remarque. Lorsque la convergence n'est pas uniforme, on peut étudier la continuité de manière directe. On a $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ et $S(x_0) = S_n(x_0) + R_n(x_0)$ donc $S(x) - S(x_0) = S_n(x) - S_n(x_0) + R_n(x) - R_n(x_0)$. On en déduit

$$\|S(x) - S(x_0)\| \leq \|S_n(x) - S_n(x_0)\| + \|R_n(x) - R_n(x_0)\|$$

Par un bon choix de n, on rend le dernier terme inférieur à ε (ce n doit être indépendant de x). Ce n étant fixé, on écrit la continuité de S_n en x_0 :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|S_n(x) - S_n(x_0)\| < \varepsilon$$

On a alors majoré $\|S(x) - S(x_0)\|$ par 2ε.

1.3.4 Dérivation et intégration

Intégration

On suppose que la série (f_n) est simplement convergente (de somme S) sur $[a,b]$. On suppose en outre que les f_n sont intégrables sur $[a,b]$. On peut alors étudier la série de terme général $\int_a^x f_n(t)dt$ (*série intégrée terme à terme*). On étudie la convergence et l'éventuelle somme de cette série. La somme partielle d'ordre n de cette série est $\Sigma_n(x) = \int_a^x (f_0(t) + \cdots + f_n(t))\,dt = \int_a^x S_n(t)\,dt$. On applique le théorème d'intégration d'une suite d'applications pour obtenir :

Théorème 1.13 *Si $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est fermé borné, si toutes les $f_n : [a,b] \to E$ sont continues et si la série (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ alors la suite $(\Sigma_n(x))$ converge vers $\displaystyle\int_a^x S(t)\,dt$ et cette convergence est uniforme sur $[a,b]$. Sous ces hypothèses, on peut donc intégrer terme à terme et membre à membre :*

$$\int_a^x \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt$$

Remarque. Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, on procède de manière directe en écrivant $\Sigma_n(x) = \displaystyle\int_a^x S_n(t)\,dt + \int_a^x R_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^x S_n(t)\,dt$ étant connnu, on pourra intégrer terme à terme et membre à membre lorsque l'on aura $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^x R_n(t)\,dt = 0$.

Dérivation

On suppose que la série (f_n) est simplement convergente (de somme S) sur $[a,b]$. On suppose en outre que les f_n sont dérivables sur $[a,b]$. On peut alors étudier la série de terme général $f_n'(x)$ (*série dérivée terme à terme*). On étudie la convergence et l'éventuelle somme de cette série. La somme partielle d'ordre n de cette série est $\Sigma_n'(x) = f_0'(x) + \cdots + f_n'(x)$. On applique le théorème de dérivation d'une suite d'applications pour obtenir :

Théorème 1.14 *Si $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est fermé borné, si les $f_n : [a,b] \to E$ sont de classe C^1, si la série (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ et si la série (f_n) converge simplement en au moins un x_0 de $[a,b]$ alors la suite $(\Sigma_n'(x))$ converge vers $\frac{dS(x)}{dx}$. Sous ces hypothèses, on peut donc dériver terme à terme et membre à membre :*

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$$

1.4 Approximations des fonctions

Dans tout le paragraphe, $[a,b]$ désigne un compact de $\mathbb{R}$.

1.4.1 Approximation des fonctions réglées par des fonctions en escalier

Définition 1.15 *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to E$ est réglée si elle admet une limite à droite en chaque point de $[a,b[$ et une limite à gauche en chaque point de $]a,b]$.*

Exemple. Toute fonction $f : [a,b] \to E$ continue est réglée. De même, toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone est réglée.

Définition 1.16 *On appelle* subdivision de l'intervalle $[a,b]$ *toute famille finie de points $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.*

Définition 1.17 *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to E$ est en escalier s'il existe une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ soit constante.*

Théorème 1.18 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une application réglée de $[a,b]$ dans un espace vectoriel normé E. Il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$. En chaque point x de $]a,b]$, f admet une limite à gauche, notée g_x, donc on peut écrire :

$$\forall x \in]a,b],\ \exists \alpha_x \in [a,x[,\ \forall y \in]\alpha_x, x[,\ \|f(y) - g_x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, en chaque point x de $[a,b[$, f admet une limite à droite, notée d_x, donc on peut écrire :

$$\forall x \in [a,b[,\ \exists \beta_x \in]x,b],\ \forall y \in]x, \beta_x[,\ \|f(y) - d_x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Il est alors clair que, pour tout x de $]a,b[$, si t et t' sont deux éléments de $]\alpha_x, \beta_x[$ situés du même côté de x alors $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon$. On étend cette propriété à $[a,b]$ en posant $\alpha_a = a$ et $\beta_b = b$.
$[a, \beta_a[\cup \bigsqcup\limits_{x \in]a,b[}]\alpha_x, \beta_x[\cup]\alpha_b, b]$ forme un recouvrement ouvert de l'intervalle compact $[a,b]$.
On peut donc en extraire un recouvrement fini du type :

$$[a, \beta_a[\cup \bigsqcup_{1 \leq i \leq m}]\alpha_{x_i}, \beta_{x_i}[\cup]\alpha_b, b]$$

Soit $X = \{s_0, \ldots, s_q\}$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en rangeant par ordre croissant les points de $\{a, \beta_a, \alpha_b, b\} \cup \bigsqcup\limits_{1 \leq i \leq m} \{\alpha_{x_i}, x_i, \beta_{x_i}\}$. Pour chaque k de $\{1, \cdots, q\}$, choisissons un élément a_k de $]s_{k-1}, s_k[$ et définissons la fonction en escalier h_ε en posant d'une part $h_\varepsilon(b) = f(b)$ et d'autre part, pour tout k de $\{1, \cdots, q\}$, $h_\varepsilon(s_{k-1}) = f(s_{k-1})$ et pour t dans $]s_{k-1}, s_k[$, $h_\varepsilon(t) = f(a_k)$. Par construction, pour tout t de $[a,b]$, on a $\|h_\varepsilon(t) - f(t)\| < \varepsilon$. En posant $f_n = h_{\frac{1}{n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on obtient une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. □

Proposition 1.19 (Réciproque) *Si E est complet et s'il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $f : [a,b] \to E$ sur $[a,b]$ alors f est réglée.*

Démonstration: Chaque fonction en escalier f_n admet une limite à gauche en chaque point de $[a,b[$ et une limite à droite en chaque point de $]a,b]$ donc (extension du théorème de continuité) il en est de même de f par convergence uniforme. □

Exercice 1.3 Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable.

1.4.2 Approximation des applications continues par des applications affines par morceaux

Définition 1.20 *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to E$ est affine par morceaux s'il existe une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ soit affine (c'est à dire de la forme $x \mapsto ax + b$).*

Théorème 1.21 *Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a,b]$ dans un espace vectoriel normé E. Il existe une suite (φ_n) d'applications continues de $[a,b]$ dans E affines par morceaux sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Démonstration: Soit n un entier naturel non nul. Puisque f est uniformément continue, il existe un entier naturel non nul p tel que, pour tout couple (x, x') d'éléments de $[a,b]$, la relation $|x - x'| \leq (b-a)/p$ implique la relation $\|f(x) - f(x')\| \leq 1/n$.
Soit $X = \{a_0, \ldots, a_p\}$ la subdivision de $[a,b]$ définie par la relation $a_k = a + k(b-a)/p$. Notons φ_n l'application continue affine par morceaux 0, coïncidant avec f aux points a_k. Soient x un élément de $[a,b]$ et k un élément de $\{1, \cdots, p\}$ tel que $x \in [a_{k-1}, a_k]$. Alors :

$$f(x) - \varphi_n(x) = f(x) - \frac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}}(x - a_{k-1}) - f(a_{k-1})$$

donc $\|f(x) - \varphi_n(x)\| \leq \|f(x) - f(a_{k-1})\| + \left|\frac{x - a_{k-1}}{a_k - a_{k-1}}\right| \|f(a_k) - f(a_{k-1})\| \leq \frac{1}{n} + 1.\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$. La suite (φ_n) converge donc uniformément vers f sur $[a,b]$. □

Propriété. Il existe même une suite croissante (φ_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ affines par morceaux sur $[a,b]$ convergeant vers f uniformément sur $[a,b]$. De plus, si f est croissante, il existe une suite (φ_n) de fonctions croissantes satisfaisant à la condition précédente.
Démonstration: Il existe de même une suite (ψ_n) de fonctions continues affines par morceaux telle que, pour tout entier naturel non nul n, $\|\psi_m - f - \frac{1}{2n}\|_\infty \leq \frac{1}{2n}$. Il est clair que $\psi_n \leq f$. Posons $\varphi_n = \sup\limits_{m \in [1,n]} \psi_m$. La fonction φ_n est continue affine par morceaux et, pour tout élément x de $[a,b]$, $f(x) - \varphi_n(x) = \inf\limits_{m \in [1,n]} [f(x) - \psi_m(x)]$ ce qui montre que $O \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{n}$. La suite (φ_n), étant évidemment croissante, convient donc. Enfin, si f est croissante, il en est de même des fonctions ψ_n, et donc aussi des fonctions φ_n. □

1.4.3 Théorème de Weierstrass

Définition 1.22 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle nième polynôme de Bernstein de f le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par*

$$\forall x \in [0,1], B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

Théorème 1.23 (Théorème de Weierstrass) *Pour toute application continue f de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{P}$ des application polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ (muni de $\|.\|_\infty$).*

Démonstration: Supposons dans un premier temps $a=0$ et $b=1$. Soit $\varepsilon>0$ fixé. f, continue sur le compact $[0,1]$ est uniformément continue donc (théorème de Heine) il existe $\eta>0$ tel que $\forall u,v\in[0,1]$, $|u-v|\le\eta\Rightarrow|f(u)-f(v)|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Pour n et x fixés, comme $\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1$, on a

$$|f(x)-B_n(f)(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(f(x)-f(\frac{k}{n})\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|\le\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|x^k(1-x)^{n-k}$$

Notons $E_1=\{k\in\{0,\cdots,n\},\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\eta\}$ et $E_2=\{k\in\{0,\cdots,n\},\left|x-\frac{k}{n}\right|>\eta\}$.

- Pour tout k de E_1 on a $\left|x-\frac{k}{n}\right|\le\eta$ donc $\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$ d'où

$$\sum_{k\in E_1}C_n^k\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in E_1}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\frac{\varepsilon}{2}$$

- D'autre part,
$$\sum_{k\in E_2}C_n^k\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|x^k(1-x)^{n-k}\le2\|f\|_\infty\sum_{k\in E_2}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k\in E_2}C_n^k\eta^2x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k\in E_2}C_n^k(x-\frac{k}{n})^2x^k(1-x)^{n-k}$$
puisque pour tout k de E_2 on a $\eta\le\left|x-\frac{k}{n}\right|$. On en déduit donc :

$$\sum_{k\in E_2}C_n^k\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x-\frac{k}{n})^2x^k(1-x)^{n-k}$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x-\frac{k}{n})^2x^k(1-x)^{n-k}=x^2\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}kC_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Partant de : $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^ky^{n-k}=(x+y)^n$, on obtient par dérivation par rapport à x et en multipliant par x :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n}kC_n^kx^ky^{n-k}=nx(x+y)^{n-1}$$

d'où en remplaçant y par $1-x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
En dérivant et en multipliant de nouveau on obtient : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k y^{n-k} = nx\left((x+y)^{n-1} + (n-1)x(x+y)^{n-2}\right) = nx(nx+y)(x+y)^{n-2}$$

et donc, en substituant $1-x$ à y, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx((n-1)x+1)$.
On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-\frac{k}{n})^2 x^k (1-x)^{n-k} = x^2 - \frac{2x}{n}nx + \frac{1}{n^2}nx((n-1)x+1) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Or $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, donc $\displaystyle\sum_{k \in E_2} C_n^k \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}$.

- Les deux points précédents conduisent à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} = 0$ (car $\eta > 0$ est fixé), il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N$, $\frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], n \geq N \Rightarrow |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon$$

Revenons pour finir au cas général avec $f : [a,b] \to \mathbb{K}$.
Posons $g : [0,1] \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(a+(b-a)x)$. g est continue donc d'après 1), la suite $(B_n(g))$ de polynômes (à coefficients dans $\mathbb{K}$) converge uniformément vers g sur $[0,1]$, c'est-à-dire: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|B_n(g) - g\|_\infty = 0$. Notons, pour n dans $\mathbb{N}$, $P_n : [a,b] \to \mathbb{K}$ l'application polynomiale définie par :

$$\forall t \in [a,b],\ P_n(t) = B_n(g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

Comme les applications $[0,1] \to [a,b]$, $x \mapsto a+(b-a)x$ et $[a,b] \to [0,1]$, $t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$ sont bijectives, réciproques l'une de l'autre, on a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\|P_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |P_n(t) - f(t)| = \sup_{x\in[0,1]} |B_n(g)(x) - g(x)| = \|B_n(g) - g\|_\infty$$

et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$. □

Corollaire. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ continue. Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, alors $f = 0$.

Démonstration: D'après l'hypothèse et puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a, pour tout polynôme P : $\int_a^b \overline{P(x)} f(x)\,dx = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément sur $[a;b]$ vers f. On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \int_a^b (\overline{f(x)} - \overline{P_n(x)}) f(x)\,dx \leq (b-a)\|f - P_n\|_\infty \|f\|_\infty$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$, on déduit $\int_a^b |f(x)|^2 \, dx = 0$, d'où, puisque f est continue sur $[a,b]$, $f = 0$. □

1.4.4 Complément : deuxième théorème de Weierstrass

Définition 1.24 *On appelle polynôme trigonométrique complexe toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions $t \mapsto e^{in\omega t}$ ou, ce qui est équivalent, toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonction $t \mapsto \cos n\omega t$ et de fonctions $t \mapsto \sin n\omega t$.*

Théorème 1.25 (Deuxième théorème de Weierstrass) *Pour toute application continue et T-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques complexes convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et T-périodique. On note E l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (pulsation).

- Suite régularisante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^{2n} \frac{\omega t}{2}\,dt$. Il est clair que $I_n > 0$.
  Considérons alors $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \dfrac{1}{I_n} \cos^{2n} \dfrac{\omega t}{2}$. On vérifie que pour tout n, φ_n est paire, T-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_n = 1$.

- Produit de convolution. On note $f_n = f \star \varphi_n$ le produit de convolution de f et φ_n. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est donc l'application définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\varphi_n(t-u)\,du$ (cette intégrale existe bien puisque pour t réel fixé, $u \mapsto f(u)\varphi_n(t-u)$ est continue sur $\mathbb{R}$). Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.
  Par linéarisation de $\cos^{2n} \dfrac{\omega t}{2}$, on peut trouver des coefficients réels $c_{n,k}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cos k\omega t$ et par suite, $\varphi_n \in E$.
  Soit alors $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. $f_n(t) = \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cos k\omega(t-u)\,du$ et par suite,
  $$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(c_{n,k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) \cos k\omega u\,du \right) \cos k\omega t + \left(c_{n,k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) \sin k\omega u\,du \right) \sin k\omega t \right)$$
  et on a donc bien $f_n \in E$.

- Convergence uniforme. Soit $(n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
  $f_n(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\varphi_n(t-u)\,du = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t-v)\varphi_n(v)\,dv$. Or $v \mapsto f(t-v)\varphi_n(v)$ est T-périodique donc $f_n(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t-v)\varphi_n(v)\,dv$. On en déduit :

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t-v) - f(t))\varphi_n(v)\,dv \right| \leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t-v) - f(t)|\,\varphi_n(v)\,dv$$

  Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, f est uniformément continue sur $[0, 2T]$ (théorème de Heine).
  Soit alors $\eta \in]0, \frac{T}{2}[$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part f est bornée sur $\mathbb{R}$ (car continue et périodique) donc :
  $\exists M \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. On en déduit :

$$\int_{-\eta}^{\eta} |f(t-v) - f(t)|\,\varphi_n(v)\,dv \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(v)\,dv \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi_n(v)\,dv = \frac{\varepsilon}{2}$$

  D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{-\eta} |f(t-v) - f(t)|\,\varphi_n(v)\,dv + \int_{\eta}^{\frac{T}{2}} |f(t-v) - f(t)|\,\varphi_n(v)\,dv &\leq 4M \int_{\eta}^{\frac{T}{2}} \varphi_n(v)\,dv \\ &\leq \frac{4M(\frac{T}{2} - \eta)}{I_n} \cos^{2n} \frac{\pi\eta}{T} \end{aligned}$$

  Mais $I_n \geq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^{2n+1} \frac{\omega t}{2}\,dt = \frac{2}{\omega} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^n ds = \frac{4}{\omega} \int_0^1 (1-s^2)^n ds$ soit

$$I_n \geq \frac{4}{\omega} \int_0^1 (1-s)^n ds = -\frac{4}{\omega} \left[\frac{(1-s)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{4}{\omega(n+1)}$$

  Comme $M(\frac{T}{2} - \eta)\omega(n+1)\cos^{2n} \frac{\pi\eta}{T} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait : $\int_{-\frac{T}{2}}^{-\eta} |f(t-v) - f(t)|\,\varphi_n(v)\,dv + \int_{\eta}^{\frac{T}{2}} |f(t-v) - f(t)|\,\varphi_n(v)\,dv \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
  On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $n \geq N \Longrightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$.

$\square$

Karl Weierstrass (1815-1897), très grand mathématicien allemand, perfectionna en 1861 le concept de *convergence uniforme* d'une suite et d'une série de fonctions introduit par Gudermann (1838) puis Cauchy (1853). Son puissant théorème d'approximation des fonctions continues fut généralisé par Stone au cadre des espaces topologiques.