Polynômes, endomorphismes et matrices

Solution de quelques exercices

O. Simon, Université de Rennes I

Exercice 1 Soient P, Q_1, Q_2 dans $K[X]$ tels que $P = Q_1 \times Q_2$

1. $P(u) = Q_1(u)oQ_2(u) = Q_2(u)oQ_1(u)$
2. si Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, alors

$$KerP(u) = KerQ_1(u) \oplus KerQ_2(u).$$

1. Ceci résulte de la linéarité de u et de la commutativité de u^i et u^j.
2. D'après le théorème de Bezout, il existe Λ_1 et Λ_2 dans $K[X]$ tels que

$$1 = \Lambda_1 \times Q_1 + \Lambda_2 \times Q_2$$

donc

$$I_E = \Lambda_1(u)oQ_1(u) + \Lambda_2(u)oQ_2(u)$$

Si $v \in E$, il s'écrit

$$v = \Lambda_1(u)oQ_1(u)(v) + \Lambda_2(u)oQ_2(u)(v)$$

et on a, si $v \in KerP(u)$,

$$v_1 = \Lambda_1(u)oQ_1(u)(v) \in KerQ_2(u),\ \ v_2 = \Lambda_2(u)oQ_2(u)(v) \in KerQ_1(u)$$

On vérifie que

$$KerQ_1(u) \cap KerQ_2(u) = \{0\}$$

Exercice 17 Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Si $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ alors $P^2 = I_p$

Si $T_s = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{pp} \end{pmatrix}$ et $T_i = \begin{pmatrix} t_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ t_{p-1p} & t_{p-1p-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ t_{1p} & t_{1p-1} & t_{12} & t_{pp} \end{pmatrix}$ alors

$$PT_sP^{-1} = T_i$$

Exercice 25

- On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Comme M a deux valeurs propres distinctes et de multiplicité 1, elle est diagonalisable. On a donc une dcomposition évidente $D = M$ et $N = 0$, dont les éléments vérifient les conditions du théorème. Celle-ci étant unique, il n'y en a pas d'autres.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. On peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On a une dcomposition évidente $D = I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont les éléments vérifient les conditions du théorème. Celle-ci étant unique, il n'y en a pas d'autres.

– La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais ces deux matrices, l'une diagonale et l'autre nilpotente, ne commuttent pas.
Elle admet comme polynôme caractéristique $P_B(X) = (X-1)^2(X-2)$. La matrice B est semblable à une matrice diagonale par bloc en choisissant une nouvelle base correspondant à la dcomposition en somme directe de $\mathbb{R}^3 = Ker(M-I)^2 \oplus Ker(M-2I)$. On a

$$M - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (M-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, on trouve une base de $Ker(M-I)^2$: $\{e_1, e_2\}$.
On a $M - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $Ker(M-2I)$.
On a ainsi la matrice de passage, son inverse et la matrice semble B' à B :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $B' = D' + N'$ avec D' et N' vérifiant les conditions du théorème.
On retrouve $B = PB'P^{-1} = PD'P^{-1} + PN'P^{-1}$, d'où

$$D = PD'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = PN'P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont les éléments de la décomposition de Dunford de B.

Exercice 26

1. Comme $DN = ND$, la formule du binôme s'applique pour tout entier k :

$$A^k = (D+N)^k = D^k + \sum_{i=1}^{k} C_k^i N^i D^{k-i} = D^k + N_1$$

Si p est l'ordre de nilpotence de N, alors $N_1^p = (\sum_{i=1}^{k} C_k^i N^{i-1} D^{k-i})^p N^p = 0$. Donc N_1 est une matrice nilpotente. Comme D^k est diagonalisable, la décomposition de unford de A^k est donc $A^k = D^k + N_1$

2. Si A est inversible, 0 n'est pas une valeur propre, donc son polynôme caractéristique s'écrit $P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, avec $a_0 \neq 0$. Ainsi, d'après le théorème d'Hamilton-Cayley

$$A((-1)^n A^{n-1} + \ldots + a_1 I) = a_0 I \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{a_0}((-1)^n A^{n-1} + \ldots + a_1 I)$$

En remplaçant A par $D+N$ et en appliquant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{a_0}((-1)^n (D+N)^{n-1} + \ldots + a_2(D+N) + a_1 I) \\ &= \frac{1}{a_0}((-1)^n (D^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i N^i D^{n-1-i} + \ldots + a_2 N + a_1 I) \\ &= \frac{1}{a_0}(Q(D) + N \times M) \end{aligned}$$

comme M est un polynme en N et D, M et N commuttent et donc $N \times M$ est nilpotente, D'autre part, $Q(D)$ est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que D. On a ainsi la décomposition de Dunford de $A^{-1} = \frac{1}{a_0}Q(D) + \frac{1}{a_0}N \times M$.

Exercice 27 Mettre sous forme de Jordan la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On précisera la base dans laquelle la matrice est sous cette forme. On a $P_M(X) = -(X-2)^3(X-1)^2$, donc 2 est valeur propre triple et 1 est valeur propre double.

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et } (M-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $rang(M-2I) = 3$ donc $dim(Ker(M-2I) = 2$.

On a $rang(M-2I)^2 = 2$ donc $dim(Ker(M-2I)^2 = 3$. On a donc

$$\{0\} \subset Ker(M-2I) \subset (Ker(M-2I)^2 = (Ker(M-2I)^3$$

Donc le sous-espace caractéristique $(Ker(M-2I)^2 = W_1 \oplus (Ker(M-2I)$: on choisit $V_1 \in (Ker(M-2I)^2, \notin Ker(M-2I)$, par exemple $V_1 = e_1 - e_2$, alors

$V_2 = (M-2I)V_1$ vérifie $\begin{cases} MV_1 = V_2 + 2V_1 \\ (M-2I)V_2 = (M-2I)^2V_1 = 0 \end{cases}$

Donc, $V_2 \in Ker(M-2I)$ est un vecteur propre. Il reste à choisir V_3 un vecteur propre indépendant de V_2. On a obtenu une base du sous-espace caractéristique $(Ker(M-2I)^2$: $V_1 = e_1 - e_2,\ V_2 = e_2 - e_3,\ V_3 = e_3 - e_4$, donnant deux blocs de Jordan.

On recommence avec la valeur propre 1 :

$$M - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (M-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $rang(M-I) = 4$ donc $dim(Ker(M-I) = 1$. On choisit $V_1' \in (Ker(M-I)^2, \notin Ker(M-I)$, par exemple $V_1' = e_4$, alors $V_2' = (M-I)V_1' = e_5$ et $MV_1' = V_2' + V_1'$.
Dans la base $\{V_3, V_2, V_1, V_2', V_1'\}$, on a la forme de Jordan. D'où :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$