Problème d'analyse

à rendre pour le 23 septembre 2009

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle de classe C^2, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f par le choix de $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente non stationnaire, et que sa limite l est un point fixe attractif, i.e. $|f'(l)| < 1$. On suppose de plus que $f'(l) \neq 0$.

On se propose d'étudier la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) a) Montrer l'existence d'une constante $k < 1$ et d'un réel $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall x \in]l-\epsilon, l+\epsilon[,\ |f(x) - l| \leq k|x - l|.$$

1.b) En déduire l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq k^{n-N}|u_N - l|.$$

1.c) Montrer que $|u_n - l| = O(k^n)$.

2) a) Montrer qu'il existe une suite réelle $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - l = f'(l)(u_n - l)(1 + r_n)$$

et $r_n = O(k^n)$.

2.b) En déduire que

$$\forall n \geq 1,\ u_n - l = f'(l)^n(u_0 - l)\prod_{i=0}^{n-1}(1 + r_i)$$

3) a) Montrer que la série de terme général $\ln|1 + r_n|$ est bien définie et qu'elle converge.

3.b) En déduire que la suite de terme général $\prod_{i=0}^{n}(1 + r_i)$ converge et que sa limite est non nulle.

3.c) Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $u_n - l$ soit équivalent à $cf'(l)^n$ lorsque n tend vers l'infini. La constante c dépend-elle de la valeur initiale u_0?