Corrigé du problème d'analyse 2

Préliminaire. 1. Somme des termes d'une suite géométrique. Distinguer $y = 1$ et $y \neq 1$.

Partie 1.

1. Une fois x^{-a} mis en facteur, utiliser la question préliminaire (ici $-x \neq 1$) pour obtenir $F_n(x) = \frac{1}{x^a}\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$.

2. Pour $x \in]0,1[$, la suite $((-x)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 (suite géométrique). Ainsi la série converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^a(1+x)}$ sur $]0,1[$.

3. Le reste de la série est $R_n(x) = \frac{(-x)^{n+1}}{x^a(1+x)}$. Sur $[\epsilon, 1-\epsilon]$, la fonction $x^a(1+x)$ est positive et minorée par ϵ^a. De plus $|(-x)^{n+1}| \leq (1-\epsilon)^{n+1}$ d'où

$$\sup_{x\in[\epsilon,1-\epsilon]} |R_n(x)| \leq \frac{(1-\epsilon)^{n+1}}{\epsilon^a}$$

qui tend vers 0 car $1-\epsilon \in]0,1[$.

Partie 2.

1. Pour $x \in]0,1[$, $|\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}| = x\frac{n+1-a}{n+2-a} \leq 1$.

2. La série est alternée (nulle si $x = 0$), d'où la convergence et la majoration du reste $|R_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)|$.

3. Il suffit de montrer que la suite de fonctions R_n converge uniformément sur $[0,1]$. Or $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+2-a}}{n+2-a}$ donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^{n+2-a}}{n+2-a} = \frac{1}{n+2-a}$$

d'où le résultat. De plus G est continue car la convergence est uniforme et chaque fonction g_n est continue.

Partie 3.

1. Sur un intervalle $[\alpha,\beta] \subset]0,1[$ les fonctions f_n sont continues et la série $\sum_n f_n$converge uniformément, donc la somme F est continue et on peut échanger intégrale et sommme:

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}(g_k(\beta) - g_k(\alpha)) = G(\beta) - G(\alpha).$$

Or $H = F$ sur $[\alpha,\beta]$ et on a démontré les égalités en choisissant α et β convenablement.

2. La fonction G est continue sur $[0,1]$ et $G(0) = 0$. En faisant tendre ϵ vers 0 dans la première égalité de la question précédente, on obtient que H admet une intégrale généralisée sur $]0,\frac{1}{2}]$ qui vaut $G(\frac{1}{2})$. De même, l'intégrale de H sur $[\frac{1}{2},1]$ vaut $G(1)-G(\frac{1}{2})$. Ainsi H admet une intégrale généralisée sur $]0,1]$ et par additivité

$$\int_0^1 H(x)dx = G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-a}.$$