Chapitre 2

Intégrale de Riemann

2.1 Rappels et compléments sur la construction de l'intégrale

2.1.1 Sommes de Darboux

On se donne un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 *On appelle* subdivision de l'intervalle $[a, b]$ *toute famille finie de points* $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ *avec* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. *On appelle pas de la subdivision* X *le réel positif* $p(X) = Max_{1 \leq i \leq n}(a_i - a_{i-1})$. *Enfin, on dit que* la subdivision Y est plus fine que la subdivision X *quand* X *est un sous-ensemble de* Y.

Une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ permet de découper l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$. Si X et Y sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors la subdivision $X \cup Y$ est plus fine à la fois que X et que Y.

Soit f une fonction réelle définie et bornée sur $[a, b]$. Soit $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On pose, pour $i = 1, \ldots, n$

$$m_i = \inf\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, a_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

Ces bornes inférieures et supérieures existent bien parce qu'on a supposé f bornée sur $[a, b]$, et donc a fortiori sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$.

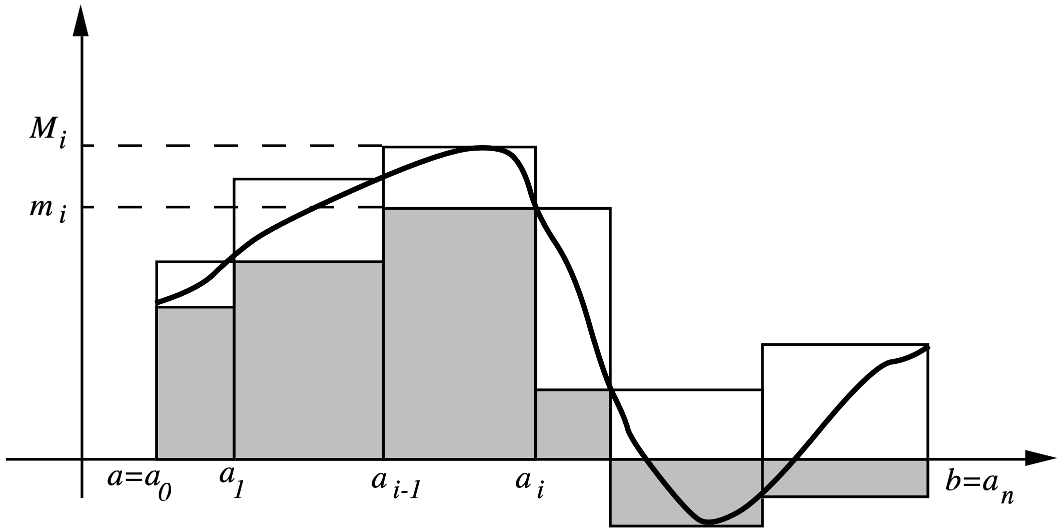
Définition 2.2 *On appelle* somme de Darboux inférieure pour la fonction f et la subdivision X *la somme*

$$s(f, X) = \sum m_i(a_i - a_{i-1}).$$

On appelle somme de Darboux supérieure pour la fonction f et la subdivision X *la somme*

$$s(f, X) = \sum M_i(a_i - a_{i-1}).$$

L'idée de la définition des sommes de Darboux est d'encadrer l'aire "sous le graphe de f" par deux sommes d'aires de rectangles, une "par en-dessous" (somme de Darboux inférieure) et l'autre "par au-dessus" (somme de Darboux supérieure).



Subdivision et sommes de Darboux : la somme de Darboux inférieure est la somme des aires des rectangles, comptées positivement pour ceux hachurés horizontalement et négativement pour ceux hachurés verticalement

Proposition 2.3 *1) Si la subdivision Y est plus fine que la subdivision X, alors on a : $s(f,X) \leq s(f,Y)$ et $S(f,X) \geq S(f,Y)$.*

2) Pour toutes subdivisions X et Y, on a $s(f,X) \leq S(f,Y)$.

Démonstration: Montrons d'abord 1. Pour cela, il suffit de considérer ce qui se passe quand on ajoute un point à la subdivision X, par exemple quand on intercale c avec $a_{i-1} < c < a_i$. Posons

$$\ell_1 = \inf\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, c]\} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \inf\{f(x);\ x \in [c, a_i]\}$$

On a bien évidemment $m_i \leq \ell_1$ et $m_i \leq \ell_2$ (on peut même vérifier que $m_i = \min(\ell_1, \ell_2)$). Donc

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leq \ell_1(c - a_{i-1}) + \ell_2(a_i - c),$$

ce qui entraîne que $s(f,X) \leq s(f, X \cup \{c\})$.
On vérifie de manière analogue que $S(f,X) \geq S(f, X \cup \{c\})$.

Montrons maintenant 2. D'après la première partie, on a $s(f,X) \leq s(f, X \cup Y)$ et aussi $S(f, X \cup Y) \leq S(f,Y)$. Comme il est clair que $s(f, X \cup Y) \leq S(f, X \cup Y)$, on a bien $s(f,X) \leq S(f,Y)$. □

2.1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

On suppose toujours la fonction réelle f bornée sur $[a,b]$

Proposition 2.4 *On pose*

$$\begin{aligned} s(f) &= \sup\{s(f,X);\ X \text{ subdivision de } [a,b]\}, \\ S(f) &= \inf\{S(f,X);\ X \text{ subdivision de } [a,b]\}. \end{aligned}$$

Ces bornes inférieures et supérieures sont bien définies, et on a $s(f) \leq S(f)$.

Démonstration: Si Y est n'importe quelle subdivision de $[a,b]$, on a, d'après le 2 de la proposition précédente, $S(f,Y) \geq s(f,X)$. L'ensemble des $s(f,X)$ est majoré par $S(f,Y)$, et donc il a une borne supérieure $s(f)$ qui est inférieure ou égale à $S(f,Y)$. Ainsi l'ensemble des $S(f,Y)$ est minoré par $s(f)$, et il a donc une borne inférieure $S(f)$, qui vérifie $s(f) \leq S(f)$. □

Définition 2.5 *La fonction* f *est* intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$ *quand* $s(f) = S(f)$. *Alors son* intégrale sur $[a,b]$ *est cette valeur commune* $s(f) = S(f)$, *et on la note*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Le x est une variable muette, on peut le remplacer par n'importe quel autre nom, comme $\int_a^b f(u)du$. On utilisera aussi les notations $\int_a^b f$ et $\int_{[a,b]} f$.

Exemple. La fonction constante égale à λ sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b \lambda\,dt = \lambda(b-a)$.
En effet, pour toute subdivision X de $[a,b]$, $s(f,X) = \lambda(b-a) = S(f,X)$.

L'idée dans la définition des fonctions intégrables est que l'encadrement entre les sommes de Darboux inférieures et les sommes de Darboux supérieures peut être rendu aussi précis que l'on veut, déterminant ainsi un réel unique. Il est commode d'utiliser le critère d'intégrabilité suivant.

Proposition 2.6 (Critère de Riemann-intégrabilité) *Soit* f *une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle* $[a,b]$. *La fonction* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *si et seulement si pour tout réel* $\epsilon > 0$, *il existe une subdivision* X *de* $[a,b]$ *telle que* $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$.

Démonstration: Supposons f intégrable, et donnons nous $\epsilon > 0$. D'après la définition de borne supérieure, il existe une subdivision Y de $[a,b]$ telle que $s(f,Y) > \int_a^b f(x)\,dx - \epsilon/2$. De même, il existe une subdivision Z telle que $S(f,Z) < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon/2$. En posant $X = Y \cup Z$, on obtient

$$S(f,X) - s(f,X) \leq S(f,Z) - s(f,Y) < \epsilon.$$

Réciproquement, supposons le critère vérifié. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut donc trouver une subdivision X telle que $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$, et donc comme $s(f,X) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f,X)$ on a $S(f) - s(f) < \epsilon$. Comme ceci doit avoir lieu pour tout $\epsilon > 0$, c'est que $s(f) = S(f)$ et donc que f est intégrable sur $[a,b]$. □

Proposition 2.7 (Caractérisation de l'intégrale de Riemann) *Soit* f *une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle* $[a,b]$. *La fonction* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *si et seulement si la différence des sommes de Darboux* $S(f,X) - s(f,X)$ *tend vers* 0 *quand le pas* $p(X)$ *de la subdivision* X *de* $[a,b]$ *tend vers* 0. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est alors la limite des* *sommes de Darboux supérieures $S(f,X)$ (ou inférieures $s(f,X)$) quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

Démonstration: La condition est suffisante d'après la proposition précédente. Etudions la réciproque.
f étant bornée, on peut écrire : $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Notons alors $A = M - m$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Toujours d'après la proposition précédente, il existe une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ telle que $S(f,X) - s(f,X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors Y une subdivision dont le pas est strictement inférieur à $\delta = \inf\limits_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$. Chaque intervalle de Y contenant au plus l'un des a_i, il y a exactement $n+1$ intervalles de Y qui contiennent un élément de X et chacun des autres intervalles de Y est inclus dans un intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ de X. On a donc $S(f,Y) - s(f,Y) \leq S(f,X) - s(f,X) + (n+1)p(Y)A$. Par suite, si $p(Y) < \inf(\delta, \frac{\varepsilon}{2A(n+1)})$ alors $S(f,Y) - s(f,Y) \leq \varepsilon$ d'où le résultat.
Enfin, pour toute subdivision X, $s(f,X) \leq s(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = S(f) \leq S(f,X)$ donc par exemple $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - s(f,X) \leq S(f,X) - s(f,X)$ et par suite $\lim\limits_{p(X)\to 0} s(f,X) = \displaystyle\int_a^b f$. □

2.1.3 Sommes de Riemann

Définition 2.8 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle somme de Riemann de f relativement à X toute somme de la forme $R(f,X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$ avec $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$.*

Proposition 2.9 (Caractérisation de l'intégrale de Riemann) *Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Alors toute somme de Riemann $R(f,X)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

Démonstration: Clair puisque $s(f,X) \leq R(f,X) \leq S(f,X)$. □

Remarque. On choisira souvent une subdivision de $[a,b]$ en intervalles de même longueur $X_n = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a_i = a + i(b-a)/n$ (pour n entier strictement positif).
Lorsque f est Riemann-intégrable, on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple. On veut calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
Si on pose $f(x) = \sqrt{x}$, on peut réécrire le terme général de la suite comme

$$\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(1)\right),$$

et on reconnait une somme de Riemann pour f sur $[0,1]$. Donc la limite est

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2.1.4 Intégrale de Riemann et fonction en escalier

Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ c'est à dire telle que φ soit constante égale à λ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$. Alors φ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_{i-1} - a_i)$.

Démonstration: φ étant bornée, on peut encore écrire : $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ et noter $A = M - m$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{2}{m} < \text{Min}\ _{1 \leq i \leq n}(a_i - a_{i-1})$. Considérons la subdivision X'_m de $[a,b]$ définie par :

$$a'_0 = a_0 < a'_1 = a_0 + \frac{1}{m} < a'_2 = a_1 - \frac{1}{m} < \cdots < a'_{2n} = a_n - \frac{1}{m} < a'_{2n+1} = a_n$$

et posons $\Delta = S(\varphi, X'_m) - s(\varphi, X'_m)$. La subdivision X'_m comporte :

- n intervalles du type $[a_{i-1} + \frac{1}{m}, a_i - \frac{1}{m}]$ sur lesquels φ est constante $(m' = M' = \lambda_i)$ et qui apportent donc une contribution nulle à Δ.
- $n - 1$ intervalles du type $[a_i - \frac{1}{m}, a_i + \frac{1}{m}]$ (donc de longueur $\frac{2}{m}$) qui apportent chacun à Δ une contribution majorée par $\frac{2}{m}A$.
- les intervalles $[a_n - \frac{1}{m}, a_n]$ et $[a_0, a_0 + \frac{1}{m}]$ qui apportent chacun une contribution majorée par $\frac{1}{m}A$.

Finalement, $S(\varphi, X'_m) - s(\varphi, X'_m) \leq \dfrac{2An}{m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ et φ est bien intégrable.

Ce raisonnement montre d'autre part que $s(\varphi, X'_m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1} - \frac{2}{m}) + B$ avec $|B| \leq \dfrac{2Mn}{m}$ et donc $\displaystyle\lim_{m \to \infty} s(\varphi, X'_m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1})$.

Comme le pas de X'_m ne tend pas vers 0, on ne peut pas conclure à ce stade. On considère alors une subdivision plus fine $X''_m = \{a_0, a_0 + \frac{1}{m}, a_0^1, a_0^2, \cdots, a_0^{\alpha_0}, a_1 - \frac{1}{m}, \cdots, a_n - \frac{1}{m}, a_n\}$ obtenue en subdivisant chaque $[a_i - \frac{1}{m}, a_{i+1} - \frac{1}{m}]$ à l'aide de points $a_i^1, a_i^2, \cdots, a_i^{\alpha_i}$ tels que $a_i^k - a_i^{k-1} < \frac{1}{m}$. En notant $a_i^0 = a_i + \frac{1}{m}$ et $a_i^{\alpha_i+1} = a_{i+1} - \frac{1}{m}$, la contribution totale de ces sous-intervalles de $[a_i - \frac{1}{m}, a_{i+1} - \frac{1}{m}]$ à $s(\varphi, X''_m)$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha_i+1} (a_i^k - a_i^{k-1})\lambda_i = (a_{i+1} - a_i - \frac{2}{m})\lambda_i$.

On a donc $s(\varphi, X''_m) = s(\varphi, X'_m)$ et le résultat s'en déduit puisque $p(X''_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. □

Théorème 2.10 (Autre critére d'intégrabilité) *Une fonction f, bornée sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si à tout $\varepsilon > O$, on peut associer deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant : $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx < \varepsilon$.*

Démonstration: Supposons tout d'abord f Riemann-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit alors une subdivision X de $[a,b]$ telle que $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$. On définit les fonctions en escalier sur $[a,b]$ φ et ψ égales respectivement à $\inf\{f(x),\, x \in [a_{i-1}, a_i[\}$ et $\sup\{f(x),\, x \in [a_{i-1}, a_i[\}$ sur $[a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in \{1, \cdots n\}$ et $\psi(b) = \varphi(b) = f(b)$. Par construction, on a bien $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt = s(f,X)$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(t)\,dt = S(f,X)$. Finalement $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(t)\,dt = S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. Supposons réciproquement qu'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx < \varepsilon$. Soit $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fois à φ et à ψ. Soit $i \in \{1, \cdots n\}$. Pour tout x de $[a_{i-1}, a_i[$, on a $\varphi(x) = \lambda_i \leq \inf\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, a_i[\} \leq \sup\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, a_i[\} \leq \psi(x) = \mu_i$ et par suite $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$. □

Remarque. Toutes les propriétés élémentaires de l'intégrale (propriétés que nous rappelerons plus loin) peuvent de démontrer à partir de ces critères.

Exercice 2.1 [Linéarité de l'intégrale] Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, et soit λ un nombre réel. Montrer qu'alors

1. $f + g$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,

2. λf est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

2.2 Classes de fonctions intégrables au sens de Riemann

Théorème 2.11 (Fonctions réglées) *Toute fonction réglée sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ réglée.
f est limite uniforme d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\displaystyle\sup_{x \in [a,b]} |\varphi_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. On note u la fonction constante égale à $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ sur $[a,b]$ et on pose $h = \varphi_{n_0} + u$ et $g = \varphi_{n_0} - u$. Les fonctions g et h sont en escalier sur $[a,b]$ et vérifient $g \leq f \leq h$ et $\displaystyle\int_a^b (h - g)(t)\,dt = \varepsilon$. On en déduit que f est intégrable sur $[a,b]$. □

Corollaire. [Fonctions continues] Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Corollaire. [Fonctions monotones] Toute fonction monotone sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann.

2.2.1 Exemple de fonction bornée sur $[a,b]$ non intégrable au sens de Riemann

Définissons la fonction de Dirichlet sur l'intervalle $[a,b]$ par $D(x)=1$ si x est rationnel et $D(x)=O$ si x est irrationnel. Soit φ est une fonction en escalier inférieure à D sur $[a,b]$, associée à une subdivision $x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b$. Pour tout i, l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ contient un irrationnel (propriété de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) x pour lequel $\varphi(x)=\lambda_i\leq D(x)=0$ donc $\int_a^b \varphi(x)\,dx\leq 0$. De même, si ψ est une fonction en escalier supérieure à D sur $[a,b]$, associée à une subdivision $x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b$ alors pour tout i, l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ contient un rationnel x pour lequel $\psi(x)=\mu_i\geq D(x)=1$ donc $\int_a^b \psi(x)\,dx\geq b-a$. Par suite, $\int_a^b(\psi-\varphi)\geq b-a$ et la fonction D n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

2.2.2 Exemple de fonction non réglée intégrable au sens de Riemann

C'est le cas de la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
Soit en effet $\varepsilon>0$. $x\mapsto\sin\frac{1}{x}$ est continue donc intégrable sur $[\frac{\varepsilon}{4},1]$ et il existe donc des fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi\leq f\leq\psi$ sur $[\frac{\varepsilon}{4},1]$ et $\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1(\psi(t)-\varphi(t))\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$.
Considérons alors les fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 définies par $\varphi_1(x)=\varphi(x)$ si $x\in[\frac{\varepsilon}{4},1]$ et $\varphi_1(x)=-1$ sinon, ainsi que $\psi_1(x)=\psi(x)$ si $x\in[\frac{\varepsilon}{4},1]$ et $\psi_1(x)=1$ sinon. Il est clair que l'on a $\varphi_1\leq f\leq\psi_1$ sur $[0,1]$ et d'autre part,

$$\int_0^1(\psi_1(t)-\varphi_1(t))\,dt=\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}(\psi_1(t)-\varphi_1(t))\,dt+\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1(\psi(t)-\varphi(t))\,dt<2\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Par suite f est bien intégrable.
Il est cependant clair que f n'est pas réglée (f n'a pas de limite à droite en 0).

2.3 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 2.12 *Soient f_1,f_2 deux fonctions bornées intégrables sur $[a,b]$. Alors la fonction $f=\sup\{f_1,f_2\}$ définie par $\forall x\in[a,b]$, $f(x)=\sup\{f_1(x),f_2(x)\}$ est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration: Remarquons tout d'abord que si $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi_1\leq f_1\leq\psi_1$ et $\varphi_2\leq f_2\leq\psi_2$ alors, les fonctions $\sup(\varphi_1,\varphi_2),\sup(\psi_1,\psi_2)$ sont des fonctions en escalier vérifiant

$$\sup(\varphi_1,\varphi_2)\leq f\leq\sup(\psi_1,\psi_2)$$

Par ailleurs, on a la relation $\sup(\psi_1,\psi_2)-\sup(\varphi_1,\varphi_2)\leq\psi_1-\varphi_1+\psi_2-\varphi_2$. En effet, on a, quel que soit $x\in[a,b]$, $\varphi_1(x)\leq f(x)$ et $\varphi_2(x)\leq f(x)$ et pour les valeurs de x de $[a,b]$

telles que $\sup(\psi_1(x), \psi_2(x)) = \psi_1(x)$, on pourra écrire :

$$\sup(\psi_1(x), \psi_2(x)) - \sup(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \leq \psi_1(x) - \varphi_1(x)$$

alors que pour les valeurs de x telles que $\sup(\psi_1(x), \psi_2(x)) = \psi_2(x)$, on aura : $\sup(\psi_1(x), \psi_2(x)) - \sup(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \leq \psi_2(x) - \varphi_2(x)$. L'inégalité annoncée en résulte, en remarquant que les deux quantités $\psi_1(x) - \varphi_1(x)$ et $\psi_2(x) - \varphi_2(x)$ sont positives pour tout x de $[a, b]$ et que chacune est inférieure à leur somme.
L'existence de l'intégrale de f s'en déduit immédiatement. Soit $\varepsilon > O$, choisissons les fonctions en escalier $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ telles que $\int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$.
Les deux fonctions en escalier $\varphi = \sup(\varphi_1, \varphi_2)$ et $\psi = \sup(\psi_1, \psi_2)$ encadrent, comme on l'a vu, la fonction f et vérifient : $\int_a^b (\psi - \varphi)(t)\,dt \leq \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)\,dt + \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)\,dt < \varepsilon$. ce qui établit la propriété. □

Remarque. La relation : $\inf(f_1, f_2) = -\sup(-f_1, -f_2)$ permet d'affirmer, en tenant compte de la linéarité de l'intégrale, que la fonction $\inf(f_1, f_2)$ est aussi intégrable sur le segment $[a, b]$.

Théorème 2.13 *Si f_1 et f_2 sont des fonctions bornées intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, le produit $f_1 f_2$ est aussi intégrable.*

Démonstration: Supposons, dans un premier temps, que les fonctions f_1 et f_2 de l'énoncé soient positives, et soient $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ des fonctions en escalier, elles aussi positives, telles que $0 \leq \varphi_1 \leq f_1 \leq \psi_1$ et $0 \leq \varphi_2 \leq f_2 \leq \psi_2$. Il en résulte que $0 \leq \varphi_1\varphi_2 \leq f_1 f_2 \leq \psi_1\psi_2$, et dans cette expression $\varphi_1\varphi_2$ et $\psi_1\psi_2$ sont des fonctions en escalier. Pour montrer que $f_1 f_2$ est intégrable, donnons-nous $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il est possible de choisir ces fonctions en escalier de manière à ce que : $\int_a^b (\psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2)(t)\,dt < \varepsilon$.
f_1 et f_2 étant bornées, notons $M_i = \sup\limits_{x \in [a,b]} f_i(x)$ et $M = \max(M_1, M_2)$. f_1 et f_2 sont intégrables donc il existe des fonctions en escalier $\varphi_1', \varphi_2', \psi_1', \psi_2$ telles que $\varphi_1' \leq f_1 \leq \psi_1'$, $\varphi_2' \leq f_2 \leq \psi_2$, et $\int_a^b (\psi_1' - \varphi_1')(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2M}$ et $\int_a^b (\psi_2 - \varphi_2')(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2M}$. Posons $\varphi_i = \sup(\varphi_i', 0)$ et pour $x \in [a, b]$, $\psi_1(x) = \psi_1'(x)$ si $\psi_1'(x) \leq M$ et $\psi_1(x) = M$ sinon. $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont alors des fonctions en escalier telles que $0 \leq \varphi_1 \leq f_1 \leq \psi_1$ et $0 \leq \varphi_2 \leq f_2 \leq \psi_2$. Or,

$$\psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2 = \psi_1(\psi_2 - \varphi_2) + \varphi_2(\psi_1 - \varphi_1) \leq M(\psi_2 - \varphi_2) + M(\psi_1 - \varphi_1)$$

donc, grâce à la croissance et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2)(t)\,dt \leq M \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)\,dt + M \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)\,dt \leq \varepsilon$$

Si maintenant f_1 et f_2 sont quelconques, on se ramène à ce qui précède grâce à la décomposition classique d'une fonction bornée f : $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \sup(0, f)$

et $f^- = -\inf(0, f)$, dans laquelle f^+ et f^- sont des fonctions positives intégrables si f est intégrable, d'après la proposition précédente. On peut ainsi écrire :

$$f_1 f_2 = (f_1^+ - f_1^-)(f_2^+ - f_2^-) = f_1^+ f_2^- - f_1^+ f_2^- - f_1^- f_2^+ + f_1^- f_2^-$$

qui fait apparaître le produit $f_1 f_2$ comme une combinaison linéaire de produits de fonctions positives intégrables. Le théorème en résulte, compte tenu des propriétés rencontrées précédemment. $\square$

Conséquence. Comme on sait, par ailleurs, que $f_1 + f_2$ est intégrable, on déduit : L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur le segment $[a, b]$ est un anneau.

2.4 Rappel des propriétés de l'intégrale de Riemann

2.4.1 Généralités

Proposition 2.14 (Propriété de la moyenne) *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$, et soient m et M des réels tels que pour tout x de $[a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$. Alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Si en outre f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c).$$

La quantité $(\int_a^b f(x)\,dx)/(b-a)$ est appelée *valeur moyenne de f sur* $[a, b]$.
On remarque que la proposition vaut encore pour $b < a$, avec $c \in [b, a]$.

Proposition 2.15 (Positivité) *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$. Si f est positive ou nulle sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*
En outre, si f est continue sur $[a, b]$, l'intégrale n'est nulle que si et seulement si f est identiquement nulle.

Corollaire. Soient f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Si on a $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Proposition 2.16 *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$. Alors sa valeur absolue $|f|$ est aussi intégrable sur $[a, b]$, et on a*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Si $b < a$, on note par convention $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ et si $a = b$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Proposition 2.17 (Relation de Chasles) *Soient a, b et c trois nombres réels. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle fermé contenant a, b et c. Alors*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Exercice 2.2 Montrer que si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

Proposition 2.18 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

De plus, si f et g sont continues, on a égalité si et seulement si f est identiquement nulle ou s'il existe une constante λ de $\mathbb{R}$ telle que $g = \lambda f$.

Proposition 2.19 (Fonctions continues par morceaux) *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ c'est à dire telle qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ ait un prolongement par continuité $g_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t)\,dt$$

Proposition 2.20 *Si la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ et si g est obtenue à partir de f en modifiant la valeur de f en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors g est aussi intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration: Il suffit de vérifier que si g est la fonction définie sur $[a,b] \ni c$ par $g(c) = \lambda \in \mathbb{R}$ et $g(x) = 0$ si $x \neq c$ alors g est intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale est nulle. Or ce résultat est clair car une telle fonction g est une fonction en escalier. $\square$

2.4.2 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition 2.21 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite intégrable sur $[a,b]$ si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont intégrables sur $[a,b]$ et on pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,dt$$

De même, une fonction à valeurs complexes est dite continue si ses parties réelle et imaginaire sont continues.
L'intégrale des fonctions à valeurs complexes hérite de nombreuses propriétés de l'intégrale des fonctions réelles (linéarité, relation de Chasles, passage au module ...)

2.4.3 Intégrale d'une fonction continue comme fonction de sa borne supérieure

Proposition 2.22 *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est continue sur $[a,b]$.*

Théorème 2.23 *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors la fonction F est dérivable sur I, et sa dérivée F' est égale à f (F est une* primitive *de f sur I).*

Corollaire. Une fonction réelle f continue sur un intervalle I a une primitive sur I. Deux primitives de f sur I diffèrent par une constante. Si G est une primitive de f sur I, alors pour tous a, b de I on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

On emploie souvent la notation $[G(x)]_a^b$ pour $G(b) - G(a)$.

2.4.4 Calcul d'intégrales

Théorème 2.24 (Intégration par parties) *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Théorème 2.25 (Changement de variables) *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert J, et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans J. Si a et b sont dans I,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\ .$$

2.5 Compléments

2.5.1 Deuxième formule de la moyenne

Théorème 2.26 (Deuxième formule de la moyenne) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie, positive, décroissante sur $[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors il existe c dans $[a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a+)\int_a^c g(t)\,dt$$

Démonstration: Comme f est monotone, elle est intégrable et elle admet une limite à droite $f(a+)$ en a. Tous les termes de la formule de l'énoncé sont donc définis.
Supposons d'abord que f est en escalier sur $[a,b]$. Soit $X = \{a_0,\dots,a_n\}$ une subdivision telle que f soit constante égale à λ_i sur $]a_{i-1},a_i[$, $(1 \le i \le n)$. On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,dt &= \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(t)\,dt \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_a^{a_i} g(t)\,dt - \int_a^{a_{i-1}} g(t)\,dt\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \int_a^{a_i} g(t)\,dt + \lambda_n \int_a^b g(t)\,dt\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt$ étant continue, on note m sa borne inférieure et M sa borne supérieure. Comme $\forall i$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} \ge 0$ et $\lambda_n \ge 0$, il vient :

$$m\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \lambda_n\right) \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le M\left(\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \lambda_n\right)$$

ce qui donne $m\lambda_1 \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le M\lambda_1$ avec $\lambda_1 = f(a+)$.
Revenons au cas général et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision de $[a,b]$ en n parties égales dont les éléments sont les points $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ $(0 \le i \le n)$. Soient u_n et v_n les fonctions en escalier sur $[a,b]$ définies par

$$u_n(x) = f(a_k) \qquad\qquad v_n(x) = f(a_{k-1})$$

si x est un élément de $[a_{k-1},a_k[$ pour $1 \le k \le n$ et par $u_n(b) = v_n(b) = f(b)$. La fonction f étant décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \le f \le v_n$ d'où :

$$\int_a^b (f(t) - u_n(t))\,dt \le \int_a^b (v_n(t) - u_n(t))\,dt = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$$

Par suite $\left|\int_a^b u_n(t)g(t)\,dt - \int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)) \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|$. On en déduit que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(t)g(t)\,dt$. Par ailleurs, d'après la première partie de la démonstration, on a :

$$mf(a + \frac{b-a}{n}) \le \int_a^b u_n(t)g(t)\,dt \le Mf(a + \frac{b-a}{n})$$

d'où par passage à la limite $mf(a+) \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le Mf(a+)$. On conclut alors en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt$.
$\square$