Chapitre 4

Intégrales dépendant d'un paramètre

4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie sur $D \times [a,b]$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout x de D, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[a,b]$. On peut alors définir une fonction F sur D par $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ (on dit que l'intégrale $F(x)$ dépend du paramètre x).

4.1.1 Continuité

Lemme 4.1 *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$ alors pour tout x_0 de $]\alpha,\beta[$ on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \forall t \in [a,b], |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$$

(cad $x \mapsto f(x,t)$ est continue en x_0 uniformément par rapport à t)

Démonstration: Soit u un point de $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. f est continue en (x_0,u) donc $\exists \eta_u > 0, \exists h_u > 0, \forall x \in]x_0 - \eta_u, x_0 + \eta_u[, \forall t \in]u - h_u, u + h_u[\cap[a,b], |f(x,t) - f(x_0,u)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
En particulier, pour $x = x_0$, $\forall t \in]u - h_u, u + h_u[\cap[a,b], |f(x_0,t) - f(x_0,u)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Finalement, $\forall x \in]x_0 - \eta_u, x_0 + \eta_u[= W_u, \forall t \in V_u \cap [a,b]$ où $V_u =]u - h_u, u + h_u[$, $|f(x,t) - f(x_0,t)| \leq |f(x,t) - f(x_0,u)| + |f(x_0,t) - f(x_0,u)| \leq \varepsilon$. $\bigcup\limits_{u\in[a,b]} V_u$ est alors un recouvrement d'ouverts du compact $[a,b]$. On peut donc en extraire un recouvrement fini $V_1, V_2, ..., V_n$ correspondant aux points $u_1, u_2, ..., u_n$ de $[a,b]$. Notons W l'intersection des W_u $(i = 1..n)$. Pour tout x de W et pour tout t de $[a,b]$, il existe un k tel que t soit dans V_k. Or x est dans W_k et donc : $|f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$ □

Théorème 4.2 (Théorème de continuité) *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$ alors F est continue sur $]\alpha,\beta[$.*

Démonstration: Soient $x_0 \in]\alpha,\beta[$ et $\varepsilon > 0$ fixés.
D'après le lemme, $\exists\eta > 0,\ \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[, \forall t \in [a,b], |f(x,t)-f(x_0,t)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ et donc $|F(x)-F(x_0)| \leq \displaystyle\int_a^b |f(x,t)-f(x_0,t)|\,dt \leq \varepsilon$ □

Remarque 1. La continuité de F en x_0 est donc assurée sous la seule hypothèse de la continuité uniforme par rapport à t de la fonction $x \mapsto f(x,t)$ en x_0.

Remarque 2. Si on remplace $]\alpha,\beta[$ par $[\alpha,\beta]$ ou plus généralement par un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, le même procédé prouve que F est continue sur $[\alpha,\beta]$ (resp. sur I).

Exemple. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_{t=0}^1 \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$.
$f : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[\times[0,1]$ donc d'après le théorème précédent, F est continue sur $]0,+\infty[$. En particulier, F est continue en 1 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = F(1) = \lim_{x\to1} F(x)$. Or, pour $x \neq 1$, $\dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left[\dfrac{1}{t^2+1} - \dfrac{1}{t^2+x^2}\right]$ (décomposition en éléments simples). Par suite,

$$F(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\arctan t - \frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}\right]$$

Un développement limité au voisinage de 1 montre que

$$\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})(x-1) + (x-1)\varepsilon(x)$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to1} F(x) = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$. On a donc montré que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

4.1.2 Dérivabilité

Théorème 4.3 (Théorème de dérivabilité) *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$ alors F est de classe C^1 sur $]\alpha,\beta[$ et on a : $\forall x \in]\alpha,\beta[, F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.*

Démonstration: Soit x_0 un point fixé de $]\alpha,\beta[$. Fixons $\varepsilon > 0$.
$F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt = \int_a^b [f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)f'_x(x_0,t)]dt.$
Le lemme appliqué à la fonction continue $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ assure que :

$$\exists\eta > 0, \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[, \forall t \in [a,b], |f'_x(x,t) - f'_x(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Soit alors $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_t(x) = f(x,t) - (x - x_0)f'_x(x_0,t)$ où t est un point fixé de $[a,b]$. h_t est continue et dérivable sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, puisque $\sup_{x \in]x_0-\eta,x_0+\eta[} |h'_t(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, on a :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |h_t(x) - h_t(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} |x - x_0|$$

Or, $\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt \right| \leq \int_a^b |h_t(x) - h_t(x_0)|\, dt$ et donc :

$$\left| F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| \leq \varepsilon\, |x - x_0|$$

□

Remarque 1. La dérivabilité de F en x_0 est donc assurée sous les seules hypothèses $x \mapsto f(x,t)$ dérivable en x_0, $x \mapsto f'_x(x,t)$ continue en x_0 uniformément par rapport à t et $t \mapsto f'_x(x,t)$ intégrable sur $[a,b]$.

Remarque 2. Si on remplace $]\alpha,\beta[$ par $[\alpha,\beta]$ (ou plus généralement par un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$), le même procédé prouve que F est dérivable à droite en α et à gauche en β (resp. sur I).

Exemple. Soit $F : x \mapsto \int_{t=0}^{\pi/2} \ell n\,(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\; dt$.

- Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  F est clairement paire et, $\forall x > 0$, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^2 t + x^2 \sin^2 t > 0$. Par suite, la fonction $f : (x,t) \mapsto \ell n\,(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)$ est continue sur $]0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]$. De plus, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{2x \sin^2 t}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}$ qui est continue sur $]0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Le théorème précédent s'applique donc : F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a : $\forall x > 0$, $F'(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{2x \sin^2 t}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}\, dt$.
- Calculons alors $F(x)$ pour tout réel $x > 0$.
  Soit $x > 0$. Le changement de variable $u = \tan t$ conduit à

  $$F'(x) = 2x \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1 + x^2u^2} \frac{du}{1 + u^2}$$

  Or, pour $x \neq 1$, $\frac{u^2}{(1 + x^2u^2)(1 + u^2)} = \frac{1}{x^2 - 1}\left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2}\right]$ (décomposition en éléments simples) donc $F'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\arctan u - \frac{1}{x}\arctan(xu)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{x+1}$. Ce résultat est encore valable pour $x = 1$ puisque $F'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{\pi}{2}$. Comme de plus $F(1) = 0$, une simple intégration prouve que : $\forall x > 0$, $F(x) = \pi \ell n \left(\frac{x+1}{2}\right)$.

4.1.3 Intégrabilité

Théorème 4.4 (Théorème d'intégration) *Si f est continue sur $I \times [a,b]$ et si $[\alpha,\beta]$ est un compact de l'intervalle non vide I, alors $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right) dt$ (on dit que l'on a interverti les intégrations).*

Démonstration: Soient $G : y \mapsto \int_\alpha^y F(x)\,dx$ et $H : y \mapsto \int_a^b \left(\int_\alpha^y f(x,t)\,dx\right) dt$. G et H sont dérivables et on a $\forall y \in [\alpha,\beta]$, $G'(y) = F(y)$ et $H'(y) = \int_a^b f(y,t)\,dt$. G et H diffèrent donc d'une constante. Or $G(\alpha) = 0$ et $H(\alpha) = \int_a^b 0\,dt = 0$. On a donc bien $G(\beta) = H(\beta)$. (Théorème de Fubini) □

4.2 Cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre

Nous allons supposer que les bornes de l'intervalle d'intégration sont les valeurs de deux fonctions continues u et v définies sur un intervalle I et telles que l'image de I par chacune d'elles soit incluse dans $[a,b]$. $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est toujours supposée continue sur $I \times [a,b]$. Pour tout x de I, ces hypothèses entraînent l'existence de $\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$. Nous allons étudier les propriétés de Φ.

Théorème 4.5 (Continuité de Φ) *Soit $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction continue sur $I \times [a,b]$. Soient u et v deux fonctions continues sur I telles que $u(I)$ et $v(I)$ soient inclus dans $[a,b]$. Alors, la fonction : $x \mapsto \Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$ est continue sur I.*

Démonstration: Montrons que Φ est continue sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de I.
La continuité de Φ en tout point x_0 de $[\alpha,\beta]$ peut se démontrer directement. Mais il est plus efficace de considérer la fonction φ définie sur $[a,b] \times [a,b] \times [\alpha,\beta]$ par $(u,v,x) \mapsto \varphi(u,v,x) = \int_u^v f(x,t)\,dt$. Si les points (u_0,v_0,x_0) et (u,v,x) appartiennent à l'ensemble de définition de φ, la relation de Chasles des intégrales permet d'écrire $\varphi(u,v,x) - \varphi(u_0,v_0,x_0) = \int_u^v f(x,t)\,dt - \int_{u_0}^{v_0} f(x_0,t)\,dt$
$= \int_{u_0}^{v_0} (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt + \int_u^{u_0} f(x,t)\,dt + \int_{v_0}^v f(x,t)\,dt$. Soit $\varepsilon_1 > O$ donné. En étudiant la continuité de F, nous avons montré l'existence d'un nombre $\eta_1 > O$ tel que $|x - x_0| < \eta_1$ entraîne $\left|\int_{u_0}^{v_0} (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt\right| < \varepsilon_1$. D'autre part, f est continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$, donc bornée. Notons M un majorant de $|f|$. On a donc :

$$\left|\int_u^{u_0} f(x,t)\,dt\right| \le M\,|u - u_0| \qquad \text{et} \qquad \left|\int_{v_0}^{v} f(x,t)\,dt\right| \le M\,|v - v_0|$$

et donc $|\varphi(u,v,x)-\varphi(u_0,v_0,x_0)| < \varepsilon_1 + M\,|u-u_0| + M\,|v-v_0|$. Un nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut choisir $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$. Le nombre $\eta = \min(\eta_1, \frac{\varepsilon}{3M})$ est tel que, si on a $|x-x_0| < \eta$ et $|u-u_0| < \eta$ et $|v-v_0| < \eta$, alors $|\varphi(u,v,x)-\varphi(u_0,v_0,x_0)| < \varepsilon$. La fonction φ est donc continue en (u_0,v_0,x_0) On en déduit la continuité en x_0 de la fonction composée de fonctions continues : $x \mapsto (u(x),v(x),x) \mapsto \Phi(x) = \varphi(u(x),v(x),x)$. $\square$

Théorème 4.6 (Dérivabilité de Φ) *Soit $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction continue sur $I\times[a,b]$ admettant une dérivée partielle continue sur $I\times[a,b]$. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $[a,b]$. Alors, la fonction : $x \mapsto \Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$ est dérivable sur I, et on a :*

$$\Phi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f[x,v(x)]v'(x) - f[x,u(x)]u'(x)$$

Démonstration: Reprenons la fonction φ de trois variables. L'étude faite au premier paragraphe sur la dérivabilité puis la continuité, montre que la fonction φ admet la dérivée partielle continue $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,v,x) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.
D'autre part, d'après les propriétés des fonctions primitives, les autres dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v,x) = -f(u,x)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v,x) = f(v,x)$ existent et sont continues. La fonction φ est donc de classe C^1.
On en déduit que la fonction composée $x \mapsto (u(x),v(x),x) \mapsto \Phi(x) = \varphi(u(x),v(x),x)$ est dérivable et a pour dérivée $\Phi'(x) = u'(x)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v'(x)\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ce qui donne le résultat annoncé. $\square$

Exemple. Considérons $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \frac{\ell n\,(1+xt)}{1+t^2}\,dt$.
$f : (x,t) \mapsto \frac{\ell n\,(1+xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$ continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. De plus, $v : x \mapsto x$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$. Par suite, F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a : $\forall x \geq 0$, $F'(x) = \int_0^x \frac{t\,dt}{(1+xt)(1+t^2)} + \frac{\ell n\,(1+x^2)}{1+x^2}$. F est en particulier croissante sur $[0,+\infty[$ et $F'(0) = 0$.

4.3 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

En analyse, beaucoup de fonctions se définissent comme intégrales dépendant d'un paramètre. Mais il s'agit souvent d'intégrales généralisées. Nous allons étudier ce que deviennent les propriétés déjà vues en étudiant la fonction F définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ où b peut être infini. Remarquons tout d'abord que l'hypothèse

f continue ne suffit plus pour entrainer la continuité de F.

Exemple. L'intégrale généralisée $F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-tx}\,dt$ est définie pour $0 \leq x \leq 1$ mais F n'est pas continue en O.
En effet, on a $\displaystyle\int_0^u xe^{-tx}\,dt = \left[-e^{-tx}\right]_{t=0}^{t=u} = 1 - e^{-ux}$. En faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $F(x) = 1$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = 0$; ce qui montre que F existe sur $[0,1]$, mais n'est pas continue en 0. Et pourtant la fonction f définie par $f(x,t) = xe^{-tx}$ est bien continue partout.
Nous allons être amené à préciser le mode de convergence d'une intégrale.

4.3.1 Convergence uniforme d'une intégrale

Convergence uniforme

Soit $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction continue de $D \times [a,b[$ dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ soit convergente pour tout x de D. On dit que cette intégrale est uniformément convergente sur D si à tout nombre $\varepsilon > O$, on sait associer un nombre $k(\varepsilon) \in]a,b[$, indépendant de x, tel que $u \in [k(\varepsilon), b[$ entraîne $\left|\displaystyle\int_u^b f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$, quel que soit x dans D.

Théorème 4.7 (critère de Cauchy) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ *soit uniformément convergente sur* D *est : A tout nombre* $\varepsilon > O$*, on sait associer un nombre* $k(\varepsilon)$*, indépendant de* x *dans* D*, tel que* $u_1, u_2 \in [k(\varepsilon), b[$ *entraîne* $\left|\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$.

Démonstration: La condition est nécessaire. En effet, si l'intégrale considérée est uniformément convergente, le nombre $k(\frac{\varepsilon}{2})$ associé à $\frac{\varepsilon}{2}$ est tel que $u \in [k(\frac{\varepsilon}{2}), b[$ entraîne $\left|\displaystyle\int_u^b f(x,t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour $x_1, x_2 \in [k(\frac{\varepsilon}{2}), b[$ on a :

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x,t)\,dt\right| = \left|\int_{u_1}^{b} f(x,t)\,dt - \int_{u_2}^{b} f(x,t)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Réciproquement, supposons la condition réalisée. D'après le critère de Cauchy des intégrales, pour tout x de D, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ est convergente. On peut donc faire tendre u_2 vers b dans l'inégalité : $\left|\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$, et on obtient : $\left|\displaystyle\int_{u_1}^{b} f(x,t)\,dt\right| \leq \varepsilon$.
L'intégrale considérée est donc uniformément convergente sur D. □

Convergence normale

Avec les notations déjà utilisées, l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,dt$ est dite normalement convergente sur D, s'il existe une fonction numérique positive φ, telle que $\int_a^b \varphi(t)\,dt$ converge, et telle que, pour tout t de $[a,b[$ et tout x de D, on ait $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.
La notion de convergence normale est très intéressante car elle est souvent plus facile à montrer que la convergence uniforme. Et on a le théorème qui suit

Théorème 4.8 *La convergence normale de l'intégrale* $\int_a^b f(x,t)\,dt$ *entraîne sa convergence uniforme.*

Démonstration: Soit $\varepsilon > O$ donné. D'après le critère de Cauchy des intégrales, il existe un nombre $k(\varepsilon)$, tel que $k(\varepsilon) < u_1 < u_2 < b$ entraîne $\int_{u_1}^{u_2} \varphi(t)\,dt < \varepsilon$. On en déduit $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$, et le critère de Cauchy de la convergence uniforme des intégrales est vérifié. □

4.3.2 Propriétés de F

Théorème 4.9 (Théorème de continuité) *Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction continue sur $I \times [a,b[$ telle que l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,dt$ soit uniformément convergente sur I. Alors, la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur I.*

Démonstration: Soient x_0 et x dans I. Nous devons étudier $F(x) - F(x_0)$, c'est à dire $\int_a^u (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt + \int_u^b f(x,t)\,dt - \int_u^b f(x_0,t)\,dt$, où $u \in]a,b[$ est un nombre à préciser. D'après l'hypothèse de convergence uniforme, à tout nombre $\varepsilon > O$, on sait associer un nombre u, indépendant de x, de sorte que l'on ait $\left|\int_u^b f(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$, pour tout x de I. u étant fixé, une étude déjà faite entraîne la continuité sur I de $x \mapsto \int_a^u f(x,t)\,dt$. On peut donc choisir $\eta > 0$ de sorte que $|x - x_0| < \eta$ entraîne $\left|\int_a^u f(x,t)\,dt - \int_a^u f(x_0,t)\,dt\right| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout nombre $\varepsilon > O$, $|x - x_0| < \eta$ entraîne $|F(x) - F(x_0)| < 3\varepsilon$. La fonction F est donc continue sur I. □

Théorème 4.10 (Théorème de dérivabilité) *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction continue sur $\Delta = I \times [a,b[$ telle que :*

(1) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur Δ ;

(2) il existe x_0 *dans* I *tel que l'intégrale* $\int_a^b f(x_0,t)\,dt$ *soit convergente ;*

(3) $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ *est uniformément convergente sur* I*.*

Alors, la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ *est dérivable sur* I*, et on a :*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Démonstration: Adoptons une démonstration plus conforme à l'esprit du C.A.P.E.S. Soit (b_n) une suite de $[a,b[$ convergeant vers b. Notons $S_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$. D'après le premier paragraphe, S_n est continue et dérivable sur I et on a $S_n'(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$. D'autre part on a $S_n(x_0) = \int_a^{b_n} f(x_0,t)\,dt$ et donc la suite $(S_n(x_0))$ converge. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, la convergence uniforme sur I de $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ entraîne l'existence d'un k tel que pour $u_1, u_2 \in [k,b[$, $\forall x \in I$, $\left|\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$. Or $\lim b_n = b$ donc pour $n > n_u$, $b_n \in [k,b[$. On a donc : $\forall p,q > n_u$, $\forall x \in I$, $\left|\int_{b_p}^{b_q} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\right| = \left|S_q'(x) - S_p'(x)\right| < \varepsilon$. La suite $S_n'(x)$ converge donc uniformément sur I. Le théorème de dérivation des suites de fonctions montre alors que la suite (S_n) converge uniformément vers S sur I, que S est de classe C^1 et que $S'(x) = \lim S_n'(x)$.
Comme pour tout x, $F(x) = \lim_{y\to b} \int_a^y f(x,t)\,dt$, on a $F(x) = S(x)$ et les résultats annoncés s'en déduisent. □

Exercice 4.1 Démontrer le théorème de continuité en utilisant la même méthode.

4.3.3 Exemple

a) Montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx (0 < a < b)$.

b) On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx) dt (0 < a < b)$. Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de F. Calculer $F(0)$ et déterminer $F(x)$.

(réponses : $F(0) = \ell n \frac{b}{a}$ et $F(x) = \frac{1}{2} \ell n \frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}$)

4.3.4 Complément

Théorème 4.11 (Théorème de Abel) *Soient $g, h : A \times [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et telles que :*

(1) Pour tout x de A, $t \mapsto g(x,t)$ est positive et décroissante,

(2) La famille des applications $x \mapsto g(x,t)$ converge uniformément sur A vers l'application nulle quand t tend vers b,

(3) Il existe une constante M telle que $\forall k \in [a, b[$, $\forall x \in A$, $\left|\int_a^k h(x,t)\,dt\right| \leq M$,

Alors l'intégrale $\int_a^b g(x,t)h(x,t)\,dt$ converge uniformément sur A.

Démonstration: Soient $x \in A$ et $a \leq u_1 < u_2 < b$. D'après la deuxième formule de la moyenne, il existe un c de $[u_1, u_2]$ tel que $\int_{u_1}^{u_2} g(x,t)h(x,t)\,dt = g(x,u_1)\int_{u_1}^{c} h(x,t)\,dt$. Compte tenu de (3), on a donc $\left|\int_{u_1}^{u_2} g(x,t)h(x,t)\,dt\right| \leq Mg(x,u_1)$. (2) assure alors que le critère de Cauchy pour les intégrales impropres est vérifié. □