Chapitre 3

Intégrales généralisées

3.1 Généralités

3.1.1 Introduction

On considère une fonction f de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ (ou E complet) où b est un réel ou $+\infty$. f est dite *localement intégrable* sur $[a,b[$ si f est intégrable sur tout compact $[a,\lambda]$ de $[a,b[$. C'est en particulier le cas lorsque f est continue sur $[a,b[$. Dans toute la suite, on considérera f localement intégrable sur $[a,b[$.

Remarques.

- On pourrait procéder à la même étude avec f localement intégrable sur $]a,b]$.
- On pourrait aussi le faire avec $]a,b[$ on diviserait l'étude en deux d'abord sur $]a,c]$ puis sur $[c,b[$ avec $c\in]a,b[$.

3.1.2 Définition

Par définition, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est (lorsque cela a un sens) la limite de $\displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt$ quand λ tend vers b. On s'autorise souvent à écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ avant d'avoir prouver l'existence de la limite. On parle alors de la nature de cette intégrale. Il y a en fait deux problèmes distincts l'existence de la limite et sa détermination éventuelle.

Remarque. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, elle est localement intégrable sur $[a,b[$ et on a : $\forall x\in[a,b[$, $\displaystyle\left|\int_a^x f-\int_a^b f\right| = \left|\int_b^x f\right| \leq M\,|b-x|$ où M est un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b f$. Autrement dit, l'intégrale de Riemann de f coïncide avec son intégrale généralisée.

Influence de la borne inférieure.

Soit α dans $[a,b[$. La relation de Chasles donne $\displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^\lambda f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\lambda f(t)\,dt$ sont de même nature. La borne inférieure n'a donc pas d'influence sur la nature de l'intégrale (on peut choisir a très près de b). On parle de la nature $\displaystyle\int^b f(t)\,dt$. Cette nature est donc déterminée par les propriétés de f au voisinage de b.

3.1.3 Propriétés des intégrales généralisées.

Toutes ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés analogues des intégrales définies et en passant à la limite. En voici deux exemples :

- Si f et g sont deux fonctions distinctes continues sur $[a,b[$ et telles que : $\forall x \in [a,b[$, $f(x) \leq g(x)$ alors on sait que $\displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt \leq \int_a^\lambda g(t)\,dt$. Si les intégrales convergent, on a donc par passage à la limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
- Si u et v sont de classe C^1 sur $[a,b[$, la formule d'intégration par parties donne $\displaystyle\int_a^\lambda u\,dv = [uv]_a^\lambda - \int_a^\lambda v\,du$. Si les trois limites existent, on aura par passage à la limite : $\displaystyle\int_a^b u\,dv = \lim_{\lambda\to b} u(\lambda)v(\lambda) - u(a)v(a) - \int_a^b v\,du$.

Propriété. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_x^b f(t)\,dt = O$.

Démonstration: Soit $x \in [a,b[$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ converge. Or la relation de Chasles impose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$ d'où le résultat en passant à la limite. □

3.2 Cas des fonctions réelles positives

Dans tout le paragraphe, on supposera f localement intégrable sur $[a,b[$, à valeurs réelles, et positive au voisinage de b : $\exists\alpha \in [a,b[$, $\forall x \in [\alpha,b[$, $f(x) \geq 0$.

3.2.1 Conséquence principale.

On étudie $\varphi(\lambda) = \displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt$ sur $[\alpha,b[$. Pour λ et λ' dans $[\alpha,b[$ avec $\lambda < \lambda'$, on a $\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^{\lambda'} f(t)\,dt \geq 0$. Donc φ est croissante sur $[\alpha,b[$. Seuls deux cas sont alors possibles : ou bien φ est majorée sur $[\alpha,b[$ et alors φ admet une limite en b et l'intégrale converge, ou bien φ n'est pas majorée sur $[\alpha, b[$ et alors $\lim_{\lambda\to\infty} f(t) = +\infty$ et l'intégrale diverge.

Théorème 3.1 (Théorème de comparaison) *Soient f et g localement intégrables sur $[a, b[$, à valeurs réelles, et positives sur $[\alpha, b[$.*

- *Si $\forall x \in [\alpha, b[$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\int^b g(t)\,dt$ diverge alors $\int^b f(t)\,dt$ diverge.*
- *Si $\forall x \in [\alpha, b[$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\int^b g(t)\,dt$ converge alors $\int^b f(t)\,dt$ converge.*

Démonstration: Si $\int^b g(t)\,dt$ diverge alors φ_g n'est pas majorée au voisinage de b. Or $\varphi_f(\lambda) \geq \varphi_g(\lambda)$ donc φ_f n'est pas majorée non plus et si $\int^b f(t)\,dt$ diverge. De même pour la convergence. □

Théorème 3.2 (Théorème d'équivalence) *Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b[$, si f a un signe constant au voisinage de b et si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b alors $\int^b g(t)\,dt$ et $\int^b f(t)\,dt$ sont de même nature.*

Démonstration: Supposons par exemple f positive au voisinage de b (sinon on considérerait $-f$). Par hypothèse $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim \varepsilon(x) = O$ et donc en particulier $-\frac{1}{2} < \varepsilon(x) < \frac{1}{2}$ pour x suffisamment proche de b. Sur ce voisinage, g est aussi positive donc on a : $\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$. Les théorèmes de comparaison permettent alors de conclure. □

3.2.2 Etude de la convergence lorsque $b = +\infty$.

Fonctions témoins.

Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$. En calculant $\int_a^\lambda g(t)\,dt$ et en passant à la limite on constate que si $\alpha > 1$, $\int^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$ converge et si $\alpha \leq 1$ alors l'intégrale diverge.

Règle de la partie principale.

Soit f localement intégrable et positive sur $[a, +\infty[$ telle que $f(x) \sim \dfrac{A}{x^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$. Si $\alpha > 1$, alors $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Si $\alpha \leq 1$, alors $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Règle de Riemann.

Soit f localement intégrable et positive sur $[a, +\infty[$.

- Si on peut trouver $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ soit majoré (ou ait une limite finie) au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrale $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

- Si on peut trouver $\alpha \leq 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ soit minoré par un nombre non nul (ou ait une limite non nulle) au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrale $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

Remarques.

- Les règles précédentes s'appliquent encore pour la borne $-\infty$. Pour la règle de Riemann, on étudiera $|x|^\alpha f(x)$.

- Si $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors ou bien $f(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ ou bien cette limite est nulle (en effet, si f admet une limite ℓ en $+\infty$, on a à fortiori $f(x) \sim \ell$ au voisinage de $+\infty$).

3.2.3 Etude de la convergence lorsque b est fini

Remarque. Soit f localement intégrable et positive sur $[a, b[$.

- Si f est bornée sur $[a, b[$, le théorème de Cauchy montrera qu'alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Un exemple fréquent est le cas où f est prolongeable par continuité en b. L'intégrale converge alors et est égale à l'intégrale du prolongement.

- Si f n'est pas bornée sur $[a, b[$ alors ou bien f admet $+\infty$ comme limite en b (cas étudié dans ce paragraphe) ou bien f n'a pas de limite. On étudiera ce dernier cas plus tard.

Recherche de fonctions témoins.

Soit $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$. En calculant $\int_a^\lambda g(t)\,dt$ et en passant à la limite on constate que si $0 < \alpha < 1$, $\int^b \dfrac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge et si $\alpha \geq 1$ alors l'intégrale diverge.

Règle de la partie principale.

Soit f localement intégrable sur $[a, b[$ telle que $f(x) \sim \dfrac{A}{(b-x)^\alpha}$. Si $\alpha < 1$ alors $\int^b f(t)\,dt$ converge. Si $\alpha \geq 1$ alors $\int^b f(t)\,dt$ diverge.

Règle de Riemann.

Soit f localement intégrable et positive sur $[a, b[$.

- Si on peut trouver $\alpha < 1$ tel que $(b-x)^{\alpha} f(x)$ soit majoré (ou ait une limite finie) alors l'intégrale $\int^{b} f(t)\,dt$ converge.
- Si on peut trouver $\alpha \geq 1$ tel que $(b-x)^{\alpha} f(x)$ soit minoré par un nombre non nul (ou ait une limite non nulle) alors l'intégrale $\int^{b} f(t)\,dt$ est divergente.

3.3 Intégration des équivalents

Théorème 3.3 *Soient f et g localement intégrables et positives sur $[a, b[$ (b fini ou non). On suppose que $f(x) \underset{x \to b}{\simeq} g(x)$.*

- *Si $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ converge alors $\int_{x}^{b} f(t)\,dt \underset{x \to b}{\simeq} \int_{x}^{b} g(t)\,dt$ (relation entre infiniments petits)*
- *Si $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ diverge alors $\int_{a}^{x} f(t)\,dt \underset{x \to b}{\simeq} \int_{a}^{x} g(t)\,dt$ (relation entre infiniments grands)*

Démonstration: On a $f(x) = g(x)(1+\varphi(x))$ avec $\varphi(x)$ tendant vers O quand x tend vers b, c'est à dire $f(x) - g(x) = g(x)\varphi(x)$ (forme générale de l'équivalence). $\forall \varepsilon$, $\exists \alpha$, $\forall x \in [\alpha, b[$, $|\varphi(x)| < \varepsilon$ et donc $|f(x) - g(x)| < \varepsilon g(x)$.

- Si $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ converge alors il en est de même de $\int_{a}^{b} g(t)\,dt$ et aussi de $\int_{x}^{b} g(t)\,dt$ et de $\int_{x}^{b} f(t)\,dt$. On a donc : $\left| \int_{x}^{b} f(t)\,dt - \int_{x}^{b} g(t)\,dt \right| \leq \int_{x}^{b} |f(t) - g(t)|\,dt \leq \varepsilon \int_{x}^{b} g(t)\,dt$
- Si $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ diverge on a de même

$$\Delta = \left| \int_{a}^{x} f(t)\,dt - \int_{a}^{x} g(t)\,dt \right| \leq \int_{a}^{b'} |f(t) - g(t)|\,dt + \int_{b'}^{x} |f(t) - g(t)|\,dt$$

et donc $\Delta \leq \int_{a}^{b'} |f(t) - g(t)|\,dt + \varepsilon \left(\int_{a}^{x} g(t)\,dt - \int_{a}^{b'} g(t)\,dt \right)$.

Or $\lim\limits_{x \to b} \int_{a}^{x} g(t)\,dt = +\infty$. Cette quantité est donc non nulle au voisinage de b et

$$\left| \frac{\int_{a}^{x} f(t)\,dt}{\int_{a}^{x} g(t)\,dt} - 1 \right| \leq \frac{\int_{a}^{b'} |f(t) - g(t)|\,dt}{\int_{a}^{x} g(t)\,dt} + \varepsilon - \varepsilon \frac{\int_{a}^{b'} g(t)\,dt}{\int_{a}^{x} g(t)\,dt}$$

Ce deuxième membre tendant vers ε quand x tend vers b, il peut être rendu inférieur à 2ε.

□

3.4 Etude de l'intégrale d'une fonction quelconque

Théorème 3.4 (Théorème de Cauchy) *Soit f localement intégrable sur $[a,b[$. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in[a,b[,\ \forall x,x'\in]x_0,b[,\ \left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right|<\varepsilon$$

Démonstration: On applique le critère de Cauchy d'existence d'une limite à la fonction définie par $g(\lambda)=\displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt$: $\forall\varepsilon>0,\ \exists V\in V_b,\ \forall x,x'\in V-\{b\},\ |g(x)-g(x')|<\varepsilon$. □

Application. Si f est localement intégrable et bornée sur $[a,b[$ (b fini) alors $\displaystyle\int^b f(t)\,dt$ converge.

Démonstration: On a $\left|\displaystyle\int_x^{x'} f(t)\,dt\right|\le M\,|x'-x|$ où $M=\sup|f(x)|$. Soit alors $V=]b-\frac{\varepsilon}{M},b[$. $\forall x,x'\in V$, $\left|\displaystyle\int_x^{x'} f(t)\,dt\right|<\varepsilon$. D'où le résultat. □

Définition 3.5 *On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est simplement convergente si $\displaystyle\int_a^\lambda f(t)\,dt$ admet une limite finie quand λ tend vers b. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.*

Relation entre les deux convergences.

Une intégrale absolument convergente est une intégrale convergente.

Démonstration: Le critère de Cauchy permet en effet d'écrire :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists x_0\in[a,b[,\ \forall x,x'\in]x_0,b[,\ \left|\displaystyle\int_x^{x'}|f(t)|\,dt\right|<\varepsilon$ et donc $\left|\displaystyle\int_x^{x'} f(t)\,dt\right|<\varepsilon$. □

Théorème 3.6 (Théorème de Abel) *Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ décroissante et tendant vers 0 en b (b fini ou non). Soit g une fonction à valeurs réelles ou complexes localement intégrable sur $[a,b[$ telle que la fonction $x\mapsto|\int_a^x g(t)\,dt|$ soit majorée sur $[a,b[$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est covergente.*

Démonstration: Supposons tout d'abord g à valeurs réelles. Soit M un majorant de $x \mapsto |\int_a^x g(t)\,dt|$ sur $[a,b[$. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour tous réels x, y tels que $a < x < y$, il existe z dans $[x,y]$ tel que $\displaystyle\int_x^y f(t)g(t)\,dt = f(x+)\int_x^z g(t)\,dt$ donc $\displaystyle\left|\int_x^y f(t)g(t)\,dt\right| \leq 2Mf(x+)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la limite de f en b impose l'existence d'un réel $A \in]a,b[$ tel que : $\forall x \in [A,b[$, $f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. f étant décroissante, on a $f(x+) \leq f(x)$ et par suite,

$$\forall y > x > A, \left|\int_x^y f(t)g(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ vérifie donc la condition de Cauchy et converge donc.
Pour g à valeurs complexes, on applique ce résultat aux parties réelles et imaginaires de g. □

Exemple. Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini alors pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}\,dt$ converge. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt$ sont aussi convergentes et on retrouve le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

3.5 Liaison simple entre notions de suite, de série et d'intégrale

On rappelle tout d'abord un résultat classique lorsque la fonction est positive décroissante :

Proposition 3.7 *Soit $f : [a,+\infty[$ une fonction positive décroissante. L'intégrale impropre de f sur $[a,+\infty[$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq a} f(n)$ converge.*

Démonstration: Pour clarifier les choses, supposons par exemple que $a = 1$. Par décroissance de f, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$. Par sommation il vient $\displaystyle 0 \leq f(2) + \cdots f(N) \leq \int_1^N f(t)\,dt$ mais aussi $\displaystyle 0 \leq \int_1^N f(t)\,dt \leq f(1) + \cdots + f(N-1)$. Le résultat en découle puisque la série positive $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right)$ est majorée et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\displaystyle x \mapsto \int_1^x f$ est majorée. □

Remarque. Dans le cas de convergence, cette démonstration montre que l'on peut comparer la valeur de l'intégrale généralisée et la somme de la série.

Proposition 3.8 *Soit $f : [a, b[\to E$ localement intégrable. S'il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a, b[$ tendant vers b et telle que :*

- *la suite de terme général $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt$ converge vers 0,*
- *la série $\displaystyle\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ converge,*

Alors l'intégrale $\displaystyle\int^b f(t)\,dt$ converge (le résultat est encore valable si $b = +\infty$).

Démonstration: Notons $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$, $S_n = u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ et S la limite de (S_n).
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne $|S_n - S| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, pour $\lambda \geq x_1$, $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{\lambda} f(t)\,dt - S\right| \leq \left|\displaystyle\int_{x_1}^{\lambda} f(t)\,dt - S_n\right| + |S_n - S| = \left|\displaystyle\int_{x_{n+1}}^{\lambda} f(t)\,dt\right| + |S_n - S|$. Or par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $n \geq n_1$ entraîne $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons alors $b > \lambda \geq \sup\{x_1, x_{n_0}, x_{n_1}\}$ et posons $n = \sup\{k \in \mathbb{N},\ x_k \leq \lambda\}$. n est fini et $n \geq n_i$ donc $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{\lambda} f(t)\,dt - S\right| \leq \displaystyle\int_{\lambda}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. □

Exemple. Posons $x_n = n - \frac{1}{2^n}$. Soit f la fonction continue, affine par morceaux définie sur chaque intervalle $[x_n, n + \frac{1}{2^n}]$ par $f(x) = \dfrac{n(x - x_n)}{n - x_n}$ si $x \leq n$ et $f(x) = \dfrac{n(x - 2n + x_n)}{x_n - n}$ si $x \geq n$ (f nulle en dehors de ces intervalles). On considère $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt = \frac{n}{2^n}$. La série (u_n) est convergente puisque $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt = \frac{n}{2^n}$. Le théorème précédent montre alors que $\displaystyle\int_{x_1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ (par dérivation de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$).

Remarque. On a donc une fonction positive et non bornée dont l'intégrale converge.