Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
CAPES

Ronan Quarez
Année 2008-2009

Suites numériques

1 Critère de Cauchy

1.1 QCM

a) Toute suite de Cauchy, d'entiers relatifs, converge dans $\mathbb{Z}$?

b) Toute suite de Cauchy, de rationnels, converge dans $\mathbb{Q}$?

c) Toute suite de Cauchy, de réels, converge dans $\mathbb{R}$?

d) Toute suite de Cauchy, de complexes, converge dans $\mathbb{C}$?

1.2 Exercices

Exercice 1 Soit la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

2 Suites extraites

2.1 QCM

a) De toute suite de nombre réels, on peut extraire une suite convergente ?

b) Si une suite est convergente vers l, alors toute suite extraite converge vers l ?

c) La suite (u_n) converge si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ?

2.2 Exercices

Exercice 2 On suppose que les suites (u_{3n}), (u_{4n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite. Est-ce que (u_n) converge ?

3 Suites non convergentes

3.1 QCM

a) Toute suite de nombre réels qui ne converge pas, diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$?

b) Toute suite de nombre réels positifs est convergente ou diverge vers $+\infty$?

c) De toute suite de nombre réels positifs, on peut extraire une suite convergente, ou divergente vers $+\infty$?

3.2 Exercices

Exercice 3 Montrer que la suite de terme général $\cos\left(\frac{n\pi}{150}\right)$ ne converge pas.

Exercice 4 Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{2(u_n-1)}{u_n}$. Montrer que cette suite ne converge pas.

Exercice 5 Montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

4 Suites monotones

4.1 QCM

a) Toute suite de nombre réels, croissante et majorée, est convergente ?

b) Toute suite de nombre réels, majorée par le réel A, converge vers une limite l telle que $l \leq A$?

c) Toute suite de nombre réels, croissante et majorée, converge vers sa borne supérieure ?

d) Toute suite de nombre réels, croissante et majorée par A, converge vers A ?

e) Toute suite de nombre réels, croissante et non majorée, diverge vers $+\infty$?

4.2 Exercices

Exercice 6 Etudier la nature de la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!}$.

Exercice 7 Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = -1$ et

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1) Montrer que (u_n) est majorée.

2) En déduire la nature de la suite.

3) Expliciter u_n en fonction de n.

5 Comparaisons de suites

5.1 QCM

a) Si (v_n) est convergente avec $0 \leq u_n \leq v_n$, alors (u_n) est convergente ?

b) Si (u_n) est convergente avec, $u_n \geq 0$ pour tout n, alors $\lim u_n \geq 0$?

c) Si (u_n) est convergente avec $u_n > 0$ pour tout n, alors $\lim u_n > 0$?

d) Si (u_n) est convergente et $\lim u_n \geq 0$ alors $u_n \geq 0$, à partir d'un certain rang ?

e) Si (v_n) et (w_n) convergent respectivement vers les réels l' et l'', et si $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout n, alors (u_n) converge vers l tel que $l' \leq l \leq l''$?

f) Si la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, et $\lim(b_n - a_n) = 0$, alors on a, $a_n \leq b_n$ pour tout n ?

g) Deux suites adjacentes convergent vers la même limite ?

5.2 Majorations, encadrement, équivalent

Exercice 8 Etudier les suites de terme général

$$u_n = \frac{n \sin(n)}{n^2+1}, \quad v_n = n(2 + \cos n)$$

Exercice 9 Etudier les suites de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$$

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$w_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$$

Exercice 10 Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}.$

1) Etudier la nature de la suite de terme général u_n.

2) Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$, puis donner un équivalent de $u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 11 Soit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n \geq 2$.

1) Montrer que $u_n \leq e \leq u_n + \frac{1}{n}u_n$.

2) En déduire que la suite (u_n) converge vers e, et retrouver une valeur approchée décimale de e à 10^{-1} près par défaut.

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$

1) Soit u_n une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $0 < k < 1$ vérifiant
$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$$
Montrer que u_n est convergente.

2) Etudier la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1) Montrer que $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
2) Montrer que (I_n) est décroissante et convergente.
3) Montrer que $\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n}}{I_{2n-1}} < 1$, et en déduire un équivalent simple de I_n.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$

1) Montrer qu'il existe un et seul réel $x_n \in] - \frac{\pi}{2} + n\pi, +\frac{\pi}{2} + n\pi[$ tel que $x_n = \tan x_n$.
2) Montrer que $x_n \sim n\pi$, puis que $x_n - n\pi$ converge vers un réel a, puis donner un équivalent de $x_n - n\pi - a$.

5.3 Suites adjacentes

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Soit $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n!}$.

1) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2) En utilisant les fonctions définies par $g(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ et $h(x) = g(x) + e^{-x}\frac{x^n}{n!}$, montrer que e est leur limite commune.
3) Montrer que e est irrationnel.
4) Déterminer une valeur approchée de e à 10^{-2} près par défaut. Comparer la convergence avec celle de l'exercice 12.
5) Expliciter où et comment les propriétés des suites adjacentes interviennent.

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) Etudier les suites (u_n) et (v_n).
2) Rédiger un exercice de Terminale S pour conduire cette étude.

Exercice 17 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Etudier les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

1) Etudier les suites (u_n) et (v_n).
2) Rédiger un exercice de Terminale S pour conduire cette étude.

6 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On se donne une suite de réels par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction à valeurs réelles.

a) Une suite arithmétique de nombre réels converge si et seulement si sa raison, r, vérifie $r = 0$?
b) Une suite géométrique de nombre réels converge si et seulement si sa raison, q, vérifie $\mid q \mid < 1$?
c) Si (u_n) converge vers l, alors on a l'identité $l = f(l)$?
d) Si la fonction f est croissante, alors la suite $(f(u_n))$ est croissante ?
e) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $\mid f'(x) \mid \leq k < 1$ pour tout x, alors la suite (u_n) est convergente ?

6.1 Suites arithmético-géométriques

Exercice 18 Soit la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout entier n. Calculer u_n explicitement en fonction de n.

Exercice 19 Soit la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4n$ pour tout entier n.

1) Calculer u_n explicitement en fonction de n.
2) Rédiger un exercice de Terminale S pour guider cette étude.

Exercice 20 Soit la suite donnée par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4^n$ pour tout entier n. Calculer u_n explicitement en fonction de n.

Exercice 21 Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n^3$ pour tout entier n. Calculer u_n explicitement en fonction de n.

6.2 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 22 Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{6}{\sqrt{u_n}}$.

1) Etudier la suite (u_n).

2) Rédiger un exercice de Terminale S pour guider cette étude.

Exercice 23 Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.
Déterminer la nature de (u_n) suivant la valeur de u_0.

Exercice 24

1) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

   a) Montrer que $\mid u_n - \sqrt{2} \mid \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En déduire la limite de (u_n).

   b) En utilisant la suite de terme général $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$, donner une autre estimation de l'erreur.

   c) En déduire un programme qui prend en entrée un entier naturel k, et qui renvoit en sortie une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-k} près par défaut.

2) On pose $f(x) = x^2 - 2$ et on note C_f son graphe dans un repère orthonormé. On définit la famille de points A_n de coordonnées $(w_n, 0)$ par $w_0 = 1$ et A_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à C_f au point de coordonnées $(w_n, f(w_n))$ avec l'axe des abscisses.

   a) Montrer que la suite (w_n) est bien définie.

   b) Etudier (w_n).

Exercice 25 Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Si (v_n) est une suite convergente vers l, montrer que la suite de terme général $\frac{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}{n}$ converge aussi vers l.

3) En déduire un équivalent de (u_n).

Exercice 26 Etudier la suite réelle définie par $u_0 \in [0, 1]$, et $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

6.3 Extension

Exercice 27 On cherche à étudier les suites de réels vérifiant la relation

$$6u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1) Ecrire un exercice de niveau Terminale S visant à conduire leur étude.

2) Dans quelle mesure ces suites ont leur place dans ce paragraphe ?

7 Autour de Bolzano-Weierstrass

7.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

7.2 Exercices

Exercice 28 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 29 Soient A une partie fermée de $\mathbb{R}$ et B une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $A + B$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice 30 Soient (x_n) une suite bornée de réels, et l un réel. On suppose que toute suite convergente extraite de (x_n), converge vers l. Montrer que (x_n) converge vers l.

Exercice 31 Soit A un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si son Graphe est fermé.

Exercice 32 Montrer que, de toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^2$, on peut extraire une suite convergente.

Exercice 33 Soient A et B deux sous-ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, et $f : A \to B$ une application continue et bijective.
Montrer que f^{-1} est continue.