

Formes quadratiques - Espaces euclidiens Exercices

Exercice n°1 VRAI ou FAUX

Soient $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E un K -e.v. de dimension n et q, q' deux formes quadratiques sur E . Pour chacune des propriétés suivantes, la démontrer ou expliciter un contre-exemple :

- 1) Si q et q' sont non dégénérées, il en est même de $q + q'$.
- 2) $K = \mathbb{R}$, si q et q' sont définies positives, il en est même de $q + q'$.
- 3) $K = \mathbb{R}$, si q est positive et q' est définie positive, alors $q + q'$ est non dégénérée.
- 4) Si x est isotrope, $x \in N(q)$.
- 5) $K = \mathbb{R}$, si $I(q) = \{0\}$ alors ou bien q est positive, ou bien q est négative.

Exercice n°2

Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par $q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$. Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $v = (1, 1, 1)$.

- 1) Déterminer $\text{rang}(q)$, $N(q)$, $I(q)$, F^\perp et $F^{\perp\perp}$.
- 2) Vérifier que $N(q) \subseteq F^\perp$ et que $F^{\perp\perp} = F + N$.

Exercice n°3

Montrer qu'une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel est positive ou négative si et seulement si son noyau est égal à son cône isotrope.

Exercice n°4

On considère les formes quadratiques sur \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 définies par :

- 1) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$
- 2) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$
- 3) $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$
- 4) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$

Déterminer une base orthogonale (orthonormale lorsque cela est possible) pour q . Préciser la matrice de q dans cette base et la signature de q .

Exercice n°5 (CAPES 2000)

La forme quadratique q_0 définie par $q_0(\beta, \gamma, \delta) = 3(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - 2(\gamma\delta + \delta\beta + \beta\gamma)$ est-elle définie positive ?

Exercice n°6

Pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ les formes bilinéaires sur \mathbb{R}^3 ci-dessous définissent-elles un produit scalaire ?

- 1) $a(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
- 2) $b(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + \lambda x_3y_3 + 6x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$
- 3) $c(x, y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$.

Exercice n°7

Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormale de \mathbb{R}^4 contenant une base du sous-espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ où $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Exercice n°8

Soient E un espace euclidien et $p \in L(E, E)$ tel que $p \circ p = p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

Exercice n°9

On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire standard.

1) Caractériser géométriquement les endomorphismes de matrices :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pourra d'abord calculer A^2, B^2, C^2 .

2) Trouver les matrices, dans la base canonique, de :

- la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 3y + z = 0$.
- la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x + 2y - z = 0$.

Exercice n°10

Soient E un espace euclidien de dimension n sur \mathbb{R} , F un s.e.v. de dimension p et $x \in E$. Montrer l'existence et l'unicité de $y \in F$ tel que $\|x - y\|$ soit minimum. Dans une base convenablement choisie, exprimer y en fonction de x . Traduire le résultat en termes de distance.

Applications :

- 1) Trouver a et b tel que $\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ soit minimum. Calculer ce minimum.
- 2) Trouver a et b tel que $\int_0^1 (\ln x - ax - b)^2 dx$ soit minimum. Calculer ce minimum.

Exercice n°11 Méthodes des moindres carrés.

Deux valeurs physiques sont liées par une relation $y = ax + b$. On veut trouver a et b . On fait n expériences de résultats $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer qu'on peut trouver a, b tels que $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimum. Déterminer a et b .

Exercice n°12 (CAPES 2001)

Soit M la matrice réelle d'ordre quatre $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer M^2 et M^3 , et vérifier que M^3 est combinaison linéaire de M et de M^2 .
- 2) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 la matrice M^n peut s'écrire sous la forme :

$$M^n = a_n M + b_n M^2$$

et calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

- 3) Généralisation : soit P une matrice symétrique réelle de rang 2. Prouver que P annule un polynôme de degré au plus trois, sans terme constant.

Exercice n°13

Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f - Id) = \text{Im}(f - Id)^\perp$
- 2) En déduire que si $(f - Id)^2 = 0$, alors $f = Id$.

Exercice n°14 Réduction simultanée de deux formes quadratiques.

1) Soient $V = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et deux formes quadratiques : $q_1(V) = x^2 + 2xy + 2y^2$ et $q_2(V) = x^2$.

a) Pour chacune des formes quadratiques, trouver une base où elle soit réduite.

b) Trouver une base de \mathbb{R}^2 , qui soit orthonormale pour l'une des deux formes quadratiques et orthogonale pour l'autre.

2) Sur l'espace euclidien \mathbb{R}^3 on considère $q_2(x) = x_1x_2 + x_1x_3$. trouver une base orthonormale dans laquelle la matrice de q_2 soit diagonale.

Exercice n°15

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, de dimension 3, rapporté à une base B dans laquelle on donne les deux formes quadratiques q et q' :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \\ q'(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_3x_1 \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe une base de E à la fois orthogonale pour q et pour q' . Déterminer une telle base.

Exercice n°16

Dans un \mathbb{R} espace vectoriel E de dimension finie, on donne deux formes quadratiques q et r vérifiant : $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) + r(x) > 0$. Prouver qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et r .

Exercice n°17

Montrer qu'il n'existe pas de base simultanément orthogonale pour les deux formes quadratiques définies sur \mathbb{R}^2 (muni de la base canonique) par $q(x, y) = x^2 - y^2$ et $q'(x, y) = 2xy$.

Exercice n°18 Etude des quadriques $\{M \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(\overrightarrow{OM}) = b\}$ où $b \in \mathbb{R}$.

Pour les équations suivantes, donner la nature et les caractéristiques des courbes ou surfaces considérées.

1) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 10$

2) $13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 12yz - 6xz - 4xy = 14$

3) $4x^2 + 6xy + 4y^2 + \sqrt{2}(x + y) = 0$

Exercice n°19 (d'après CAPES 1995)

Si A est une matrice symétrique réelle d'ordre 2, on note

$$\Sigma_A = \{x \in \mathbb{R}^2, Q_A(x) = {}^tXAX = 1\}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A ainsi qu'une matrice orthogonale P telle que tPAP soit diagonale. Quelle est la nature de la conique Σ_A ?

2) Vérifier que la forme quadratique Q_B est positive. Quelle est la nature de la conique Σ_B ?

Exercice n°20 (Représentation canonique des transformations orthogonales.)

Soient f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E et $g = f + f^*$.

1) Montrer que g est auto-adjoint. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes et V_{λ_i} les sous-espaces propres associés.

2) Montrer que les V_{λ_i} sont stables par f . On notera dorénavant f_{λ_i} la restriction de f à V_{λ_i} .

3) Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - \lambda_i X + 1$ est annulateur de f_{λ_i} .

4) On suppose $V_2 \neq \{0\}$. Montrer que $f_2 = Id$.

