Polynômes, endomorphismes et matrices
Exercices

O. Simon, Université de Rennes I

16 janvier 2006

Exercice 1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel sur un corps K et P un polynôme annulateur de u.

1. Montrer que $E = KerP(u)$.
2. Si λ une valeur propre de u, montrer que λ est une racine de P.

Exercice 2. Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel sur un corps K et P, Q_1, Q_2 dans $K[X]$ tels que $P = Q_1 \times Q_2$. Montrer que

1. $P(u) = Q_1(u) o Q_2(u) = Q_2(u) o Q_1(u)$
2. si Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, alors
$$KerP(u) = KerQ_1(u) \oplus KerQ_2(u).$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Exercice 4. Soit K un corps, $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice appartenant à $M_n(K)$ nilpotente non nulle est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

Exercice 5. CAPES 1989, $2^{\text{ème}}$ épreuve I - B, matrices nilpotentes.

Exercice 6. Deug MIASS, juin 2004 :
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $M^2 = M^4$. On note I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$. En déduire que si $I_n + M$ est inversible alors $M^2 = M^3$.
2. Trouver deux polynômes U et V tels que
$$(1 + X)U + (X^2 - X^3)V = 1$$
3. Montrer que si $M^2 = M^3$, alors $I_n + M$ est inversible. Calculer dans ce cas l'inverse de $I_n + M$ comme polynôme en M.
4. Donner un ensemble de trois valeurs contenant les valeurs propres de M.
5. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M = M^3$

Exercice 7. [Grifone] p.243 Soit K un corps et $M \in M_n(K)$ tel que
$$P_M(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0.$$

1. Montrer que $a_0 = det(M)$ et $a_{n-1} = (-1)^{n-1} Trace(M)$.
2. En déduire que si $M \in M_2(K)$, alors
$P_M(X) = X^2 - Trace(M)X + det(M)$.

Exercice 8. [Monier] Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$.
Montrer que : $Trace(A) \in \mathbb{N}$ et $Trace(A) \leq 4n$.

Exercice 9. Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable et inversible. En déduire son polynôme minimal et en l'utilisant calculer M^{-1}.

Exercice 10. [Monier] p. 67. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k et B^k où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Si $M \in M_p(\mathbb{R})$, $P_M(X) = det(M - XI_p) \in \mathbb{R}[X]$, montrer que le polynôme minimal de M est le même dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12. [Hiriart-Urruty] p. 86. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et soit f un endomorphisme de E tel que : $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$.

1. Montrer que f est diagonalisable et préciser ses valeurs propres possibles.
2. Montrer que, pour tout μ réel, l'endomorphisme $g = f - \mu Id_E$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres. Dans quels cas g est-il inversible ? Exprimer g^{-1} en fonction de f et Id_E lorsque $\mu \neq 2$ et $\mu \neq 3$.
3. Déterminer tous les endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition :
   $f^2 - 5f + 6Id_{\mathbb{R}^2} = 0$.

Exercice 13. [Hiriart-Urruty] p. 99. Soit G un groupe multiplicatif fini de matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que toute matrice de G est diagonalisable.

Exercice 14. Soit un endomorphisme f de E, espace vectoriel de dimension n. Montrer que si $f^{50} = 0$ alors $f^n = 0$.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application de E dans E qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $Q = X^2 - 32X + 7$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. A l'aide des polynômes annulateurs, montrer que f est diagonalisable.

Exercice 16. On donne trois nombres complexes a, b, c et les deux matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} a & b & c & b & c \\ c & a & b & c & b \\ b & c & a & b & c \\ c & b & c & a & b \\ b & c & b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2, J^3, J^4, J^5 ; puis trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 tel que $M = P(J)$.
2. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de J
   (Résoudre $JX = \lambda X$). J est-elle diagonalisable ?
3. Déduire des questions 1. et 2. que M est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
4. On suppose dans cette question que $b = c$. Déduire de 3. le polynôme minimale et le polynôme caractéristique de M.
5. On suppose toujours $b = c$, non nuls cette fois. Déterminer deux suites (α_n) et (β_n) telles que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_5$.

Exercice 17. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure. (On explicitera la matrice de passage)

Exercice 18. Soient $n \geq 2$ et $M = (m_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$, la matrice carrée définie par $m_{ij} = (-1)^{i+j}$. Soit E le s.e.v. de $M_n(\mathbb{R})$ formé des expressions polynomiales à coefficients réels de M :

$$E = \{a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_q M^q \mid a_i \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}\}$$

1. Calculer M^k pour $k \geq 2$. En déduire que E est de dimension finie et en déterminer une base. En la calculant dans cette base, montrer que e^M appartient à E.
2. Quel est le polynôme minimal de M ? En déduire les valeurs propres de M. Quel est le rang de M ?
3. Soient a et b réels et $A = (a_{ij})$ la matrice définie par :

$$\left.\begin{array}{l} a_{ii} = a \\ a_{ij} = (-1)^{i+j} b \ si \ i \neq j \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

   montrer que $A \in E$. De la valeur calculée pour M^2, déduire un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2, annulateur de A.
4. Déterminer le polynôme minimal de A, quelles sont les valeurs propres de A ?
5. A est-elle diagonalisable ? Donner les s.e.p. de A. En déduire le polynôme caractéristique de A. Que vaut $det(A)$?

Exercice 19. Matrices compagnons (voir Lionel Schwartz p. 209 pour complément)

Soient a_0, a_1, a_2 des nombres réels et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A_3.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_3 soit trigonalisable, soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. Soit

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

   Calculer le polynôme caractéristique de A_{n+1}.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A_{n+1} soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ 0 & A & 0 \\ A & A & A \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs propres de M.
La matrice M est-elle diagonalisable? Si oui, donner la forme diagonale et la matrice de passage P. Calculer $det(P)$.

Exercice 21. (Franchini) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$, donner les éléments propres de B en fonction de ceux de A. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est digonalisable et inversible.

Exercice 22. Mettre les matrices suivantes, sous forme diagonale par blocs, les blocs étant des matrices triangulaires,

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. Soit K un corps commutatif et $n = d_1 + d_2$. On donne deux matrices $A_1 \in M_{d_1}(K),\ A_2 \in M_{d_2}(K)$ et on considère la matrice diagonale par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

1. On note $Q_1, Q_2, Q \in K[T]$ les polynômes caractéristiques respectifs de A_1, A_2, A. Calculer Q en fonction de Q_1 et Q_2.
2. Montrer que A est trigonalisable sur K si et seulement si A_1 et A_2 le sont.
3. On note $P_1, P_2, P \in K[T]$ les polynômes minimaux respectifs de A_1, A_2, A. Montrer que P est un PPCM de P_1 et P_2.
4. Montrer que A est diagonalisable sur K si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

Exercice 24. Montrer que si u_1 et u_2 sont diagonalisables et commuttent, alors ils admettent une même base de vecteurs propres.
En déduire que $u_1 - u_2$ est diagonalisable.
Contre-exemple : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25. Soient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une décomposition de Dunford de M, de A et de B.

Exercice 26. [Monier] Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A \in M_n(\mathbb{C})$.
1. Quelle est celle de $A^k, k \in \mathbb{N}^*$?
2. Quelle est celle de A^{-1}, en supposant A inversible ?

Exercice 27. Mettre sous forme de Jordan la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On précisera la base dans laquelle la matrice est sous cette forme.

Exercice 28. [Franchini] p. 116 Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ laisse stable une droite vectorielle ou un plan vectoriel.

Exercice 29. On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$; on rappelle que j et j^2 sont les racines de l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$.
Le but du problème est de déterminer, pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, les matrices carrées $X \in M_n(K)$ vérifiant la relation :

$$(E)\ X^2 + X + I = 0$$

où $I \in M_n(K)$ est la matrice unité.
1. Vérifier que si $X \in M_n(K)$ vérifie (E), toute matrice semblable à X vérifie (E).
2. Si $X \in M_n(K)$ vérifie (E), quels sont les nombres complexes qui peuvent être valeur propre de X.
3. Montrer qu'une matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant (E) est diagonalisable.
4. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant (E).
   - Que peut-on dire de la multiplicité de j et j^2 comme valeurs propres de X ? Quel est le déterminant de X ?
   - En déduire que , si n est impair, il n'existe pas de matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant (E).
5. Soient F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $u : F \longrightarrow F$ un endomorphisme tel que $u^2 + u + Id = 0$, x un vecteur non nul de F.
   montrer que le sous-espace vectoriel F_x engendré par x et $u(x)$ est de dimension 2, et stable par u.
   Soit y un vecteur de F tel que $y \notin F_x$; que peut-on dire des sous-espaces F_x et F_y ?

6. Soit $J \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   En utilisant la question précédente, montrer que toute matrice $X \in M_{2k}(\mathbb{R})$ vérifiant (E) est semblable dans $M_{2k}(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs $Y = \begin{pmatrix} J & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & J \end{pmatrix}$.
7. Existe-t-il des matrices orthogonales (une matrice est orthogonale si ${}^tX.X = I$ de $M_{2k}(\mathbb{R})$ vérifiant (E) ? Déterminer ces matrices si $k = 1$.

Exercice 30. [Hiriart-Urruty] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un élément fixé de $\mathcal{L}(E)$. On désigne par u_g et u_d les applications de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définies par :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E),\ u_g(v) = u \circ v \text{ (composition à gauche avec } u)$$

$$\forall v \in \mathcal{L}(E),\ u_d(v) = v \circ u \text{ (composition à droite avec } u)$$

1. Vérifier que u_g et u_d sont des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$.
   Préciser quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E)$ et donner une base de $\mathcal{L}(E)$.
2. – Exprimer $Ker\ u_g$ (resp. $Ker\ u_d$ à l'aide de $Ker\ u$ (resp. $Im\ u$).
   – Montrer :
   $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de u_g si et seulement si il existe $v \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ tel que
   $$Im\ v \subset Ker(u - \lambda Id_E)$$
   $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de u_d si et seulement si il existe $v \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$ tel que
   $$Im\ (u - \lambda Id_E) \subset Ker\ v$$
   – Déduire de ce qui précède que u_g et u_d ont mêmes valeurs propres que u.
3. Soit λ une valeur propre de u. Expliciter le sous-espace propre de u_g (resp. de u_d) associé à λ, en fonction du sous-espace propre de u associé à λ et comparer $dim\ Ker(u_g - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$ (resp. $dim\ Ker(u_d - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$) et $dim\ Ker(u - \lambda Id_E)$.
4. Montrer :
   (u diagonalisable) $\Longrightarrow$ (u_g et u_d sont diagonalisables).

Références

[Escofier] Toute l'algèbre du 1er cycle. Jean-Pierre Escofier. Dunod 2002

[Franchini] Algèbre, Mathématiques Spéciales. Ellipses 1999

[Gostiaux] Cours de mathématiques spéciales 1. Algèbre. Bernard Gostiaux. PUF

[Grifone] Algèbre linéaire. Joseph Grifone. Cepadues-Editions, 1990

[Hiriart-Urruty] Algèbre linéaire et bilinéaire. Exercices. Cepadues-Editions, 1988

[Lelong] Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre. J.Lelong-Ferrand, J.M.Arnaudiès. Dunod Université.

[Monier] Nouveau cours de mathématiques, Tome 6, Algèbre 2, cours et 400 exercices corrigés. Jean-Marie Monier. Dunod 1996

[Schwartz] Mathématiques pour la licence, Algèbre. Lionel Schwartz. Dunod 1998