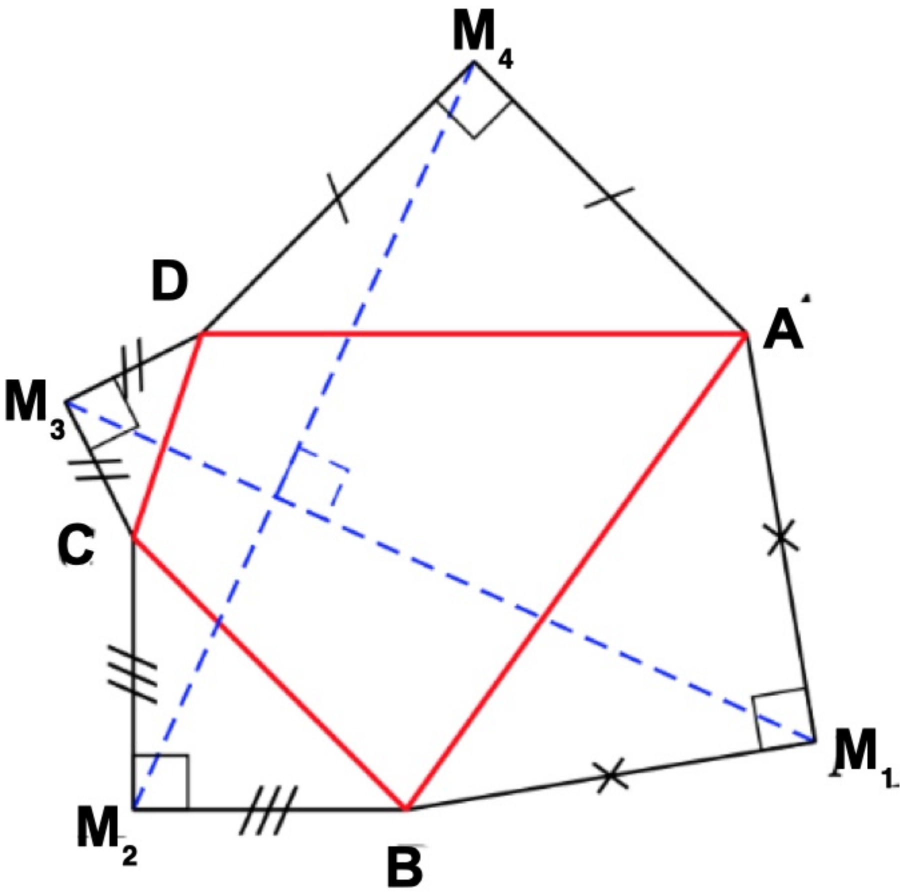
Géométrie-Devoir maison

Corrigé

Exercice



1. Rappelons que l'image d'un point M d'affixe z par la rotation $R_{(M_1,\frac{\pi}{2})}$ de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe M' d'affixe z' telle que $z' - m_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - m_1) = i(z - m_1)$. Vu les hypothèses $\widehat{AM_1B} = \frac{\pi}{2}$ et $AM_1 = BM_1$, on a $B = R_{(M_1,\frac{\pi}{2})}(A)$ et donc $b - m_1 = i(a - m_1)$.

2. On montre de la même manière qu'à la question précédente que $c - m_2 = i(b - m_2)$, $d - m_3 = i(c - m_3)$ et $a - m_4 = i(d - m_4)$. On en déduit que $(b - m_1) - (d - m_3) = i(a - m_1) - i(c - m_3)$, d'où

$$m_3 - m_1 = \frac{d - b + i(a - c)}{1 - i}.$$

On établit de façon complètement similaire que

$$m_4 - m_2 = \frac{a - c + i(b - d)}{1 - i},$$

de sorte que (en se rappelant que $i^2 = -1$), on obtient que $m_4 - m_2 = i(m_1 - m_3)$. On en déduit d'une part, que $|m_4 - m_2| = |i(m_1 - m_3)| = |i||(m_1 - m_3)| = |(m_1 - m_3)|$, soit $M_2M_4 = M_1M_3$; d'autre part que $\arg(\frac{m_4 - m_2}{m_3 - m_1}) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. En d'autres termes, l'angle orienté $(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_2M_4})$

des deux vecteurs a pour mesure $-\frac{\pi}{2}$. Ces deux points montrent bien que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont de même longueur et perpendiculaires.

Problème : Inversions du plan

I - Généralités

I.1. On a $OM' = |f(z)| = |\frac{k}{\bar{z}}| = \frac{|k|}{|\bar{z}|} = \frac{|k|}{|z|} = \frac{|k|}{OM}$.

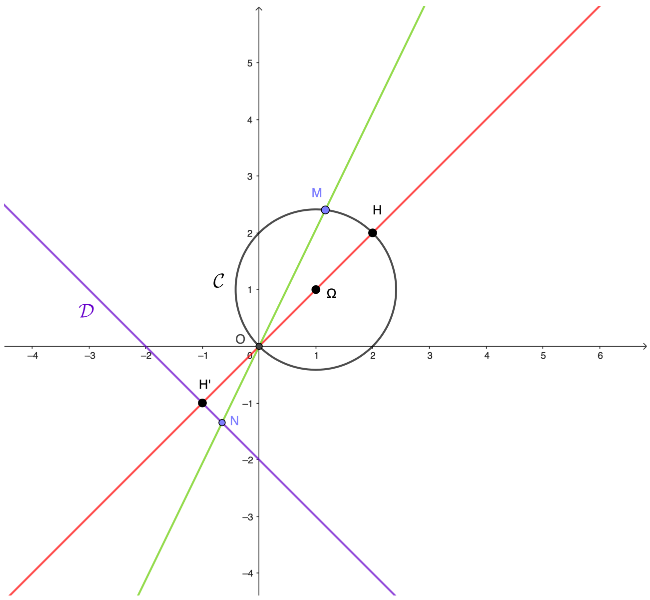
I.2. Puisque M' et M sont distincts, l'angle orienté des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM}$ est bien défini. Une mesure de ce dernier vaut alors $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg(\frac{f(z)}{z}) = \arg(\frac{k}{|z|^2}) = 0[\pi]$, vu que $\frac{k}{|z|^2}$ est réel. Ceci établit que O, M, M' sont alignés. Pour le second point, on peut par exemple utiliser que si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on a $\vec{u}.\vec{u'} = xx' + yy' = \mathcal{R}(\bar{z}z')$ où $\mathcal{R}$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe (le vérifier !). Ici, on obtient donc que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \mathcal{R}(\bar{z}f(z)) = \mathcal{R}(k) = k$.
I.3. $M = I(M) \Leftrightarrow z = f(z) \Leftrightarrow |z|^2 = k$. L'ensemble des points fixes est donc l'ensemble des points M de P^* tels que $OM^2 = k$. On doit donc distinguer deux cas (jeu de mots phonétique) suivant le signe de k :

1. $k < 0$: l'ensemble des points fixe est vide.
2. $k > 0$: l'ensemble des points fixes est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$.

I.4. L'affixe de $I(I(M))$ est donnée par $f(f(z)) = \frac{k}{(\frac{k}{\bar{z}})} = \frac{k}{(\frac{k}{z})} = z$. On a donc bien $I(I(M)) = M$.
I.5. On utilise la forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$ d'un nombre complexe $z \neq 0$. Notons d'abord qu'un point M d'affixe z appartient au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ si et seulement si $z = re^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas $f(z) = \frac{k}{re^{-i\theta}} = \frac{ke^{i\theta}}{r}$. On en déduit que $|f(z)| = \frac{|k|}{r}$. Ainsi l'image par I de $\mathcal{C}(O, r)$ est contenue dans le cercle $\mathcal{C}(O, \frac{|k|}{r})$ de centre O et de rayon $\frac{|k|}{r}$. Réciproquement, un point M' d'affixe z' appartient au cercle $\mathcal{C}(O, \frac{|k|}{r})$ si et seulement si $z' = \frac{|k|}{r}e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Par le calcul précédent, on constate que $z' = f(re^{i\theta})$ ou $z' = f(re^{i(\theta+\pi)})$ suivant que $k > 0$ ou $k < 0$.

On en déduit que l'image de $\mathcal{C}(O, r)$ par I est exactement $\mathcal{C}(O, \frac{|k|}{r})$.

II - Image par l'inversion d'un cercle passant par le point O



II.1.a. Un calcul élémentaire nous indique que H a pour affixe $2+2i$ et que H' a donc pour affixe $\dfrac{-4}{2-2i} = -1-i$. La situation est représentée ci-dessus. On peut noter que conformément à I.2, O, H et H' sont alignés.

II.1.b. Il suffit de montrer l'égalité entre deux angles géométriques de ces 2 triangles. D'après $I.2$ et puisque $k<0$, les points H', O, H sont alignés dans cet ordre. Il en est de même par construction des points N, O, M. Il en résulte l'égalité des angles géométriques $\widehat{H'ON} = \widehat{MOH}$. Notons aussi que $OH'N$ et OMH sont respectivement rectangles en H' et M ($[OH]$ étant un diamètre de $\mathcal{C}(\Omega, r)$). Ces deux triangles sont donc semblables.

II.1.c. Les triangles OMH et $OH'N$ étant semblables et rectangles, on a

$$\frac{OM}{OH} = \cos(\widehat{HOM}) = \cos(\widehat{H'ON}) = \frac{OH'}{ON}.$$

Par suite , $OM \times ON = OH \times OH' = |k|$ en vertu de I.2. Sachant que N, O, H sont alignés dans cet ordre, on en tire que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = k$. Par ailleurs $M' = I(M), O$ et M sont alignés et la relation $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$ détermine complètement la position de M', de sorte qu'on peut conclure que $M' = N$.

II.1.d. À ce stade, on a montré que l'image du cercle $\mathcal{C}$ (privé du point O) par I est contenu dans $\mathcal{D}$. Réciproquement, pour tout $N \in \mathcal{D}$, la droite (NO), n'étant pas tangente à $\mathcal{C}$ en O, coupe le cercle en un unique point $M \neq O$. Par la construction précédente, N est bien l'image de M par I. On a ainsi montré que $\mathcal{D} = I(\mathcal{C})$.

II.2. Si $k > 0$, on se ramène au cas précédent en constatant que I s'écrit sous la forme $I = s \circ J$ où J est l'inversion de rapport $-k$ et s la symétrie de centre O, laquelle est définie en terme d'affixes par $z \to -z$. L'image de $\mathcal{C}$ est donc la droite $s(\mathcal{D})$, symétrique de la droite $\mathcal{D} = J(\mathcal{C})$ par s.

III - Image par l'inversion d'un cercle ne passant par l'origine.

III.1. On observe que $\lambda = r^2 - OM^2$, en conséquence de quoi $\lambda = 0$ ssi O appartient à $\mathcal{C}$, qui était la situation étudiée dans les questions précédentes.

III.2. En effet, $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow |z-\omega|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z-\omega)(\bar{z}-\bar{\omega}) = r^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = \lambda$ en notant que $|\omega|^2 = \omega\bar{\omega}$.

III.3. On note $\mathcal{E}$ l'image de $\mathcal{C}$ par I. L'égalité $I \circ I = Id_{P^*}$ établie en $I.4$ nous montre que I est une bijection de P^* dans P^* et que I est égal à sa bijection réciproque I^{-1}.

On obtient ainsi qu'un point $M' \in P^*$ appartient à $\mathcal{E}$ ssi $I^{-1}(M') = I(M')$ appartient à $\mathcal{C}$.En vertu de III.2, ceci équivaut à dire que l'affixe z' de M' satisfait l'équation

$$\frac{k}{\overline{z'}}\overline{(\frac{k}{\overline{z'}})} - \bar{\omega}\frac{k}{\overline{z'}} - \omega\overline{(\frac{k}{\overline{z'}})} = \lambda,$$

soit encore

$$\frac{k^2}{z'\overline{z'}} - \bar{\omega}\frac{k}{\overline{z'}} - \omega\frac{k}{z'} = \lambda$$

En divisant par λ (ce qui est licite d'après III.1) et en multipliant par $z'\overline{z'}$, ceci équivaut encore à

$$z'\overline{z'} - \overline{\omega'}z' - \omega'\overline{z'} = \lambda',$$

qui se réécrit (s'inspirer du calcul mené en III.2)

$$|z' - \omega'|^2 = a$$

où $a = \lambda' + |\omega'|^2 = \frac{k^2}{\lambda} + k^2\frac{|\omega|^2}{\lambda^2} = \frac{k^2}{\lambda^2}(\lambda + |\omega|^2) = \frac{k^2}{\lambda^2}r^2 = r'^2$ où $r' = |\frac{k}{\lambda}|r > 0$. En notant $\mathcal{C}'$ le cercle du plan P de centre $\Omega'(\omega')$ et de rayon $r' > 0$, on obtient donc que $\mathcal{E} = \mathcal{C}' \setminus \{O\}$. Mais par ailleurs, puisque $\lambda' > 0$, le point O n'appartient pas à $\mathcal{C}'$, de sorte qu'on a bien $\mathcal{E} = \mathcal{C}'$.

III.4. Considérons l'homothétie h de rapport $\alpha = -\frac{k}{\lambda}$ et de centre O. Cette homothétie envoie donc $\mathcal{C}$ sur le cercle $\mathcal{C}''$ de centre $h(\Omega)$ et de rayon $|\alpha|r$. L'expression complexe de h est donnée par $z \mapsto -\frac{k}{\lambda}z$. L'affixe de $h(\omega)$ est donc $-\frac{k}{\lambda}\omega = \omega'$. On obtient donc que $h(\Omega) = \Omega'$. Par ailleurs, comme on l'a vu à la question précedente, $\alpha r = |\frac{k}{\lambda}|r = r'$. Ceci montre finalement que $\mathcal{C}''$ a même centre et même rayon que $\mathcal{C}'$ et donc que ces deux cercles coïncident. On a bien ainsi $\mathcal{C}' = h(\mathcal{C})$.