Université Rennes 1
Préparation au Capes

Variables Aléatoires Simultanées

Quelques exercices sur les variables discrètes

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de Ω.

a) Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_B$ sont indépendantes.

b) Montrer que deux variables de Bernoulli définies sur Ω sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

Exercice 2

On jette simultanément deux dés. On note X le nombre de chiffres pairs apparus et Y le maximum des deux chiffres obtenus. Chercher la loi du couple (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

a) Déterminer la loi du couple (U, V) et en déduire les lois marginales de U et V.

b) Calculer l'espérance d'une loi géométrique. En déduire l'espérance de U et V.

Exercice 4

Soit X et Y deux variables indépendantes ayant pour loi respective une loi Binômiale de paramètre (n, p) et (m, p).

a) Déterminer la loi de $X + Y$ de deux manières différentes : en décomposant une v.a. de loi Binômiale en somme de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli, puis en utilisant les fonctions génératrices.

b) Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = s\}$?

Exercice 5

On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré. On numérote les lancers à partir de 1. On définit les deux variables aléatoires:

X égale au numéro du lancer qui donne le premier 6,
Y égale au nombre de 5 obtenus avant le premier 6.

Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 6

a) Calculer la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ.

b) Soient X et Y deux variables indépendantes, de loi de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Montrer que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ en utilisant la fonction génératrice.

c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$.
Si $X_1, ..., X_r$ sont indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_r$, quelle est la loi conditionnelle de $(X_1, ..., X_{r-1})$ sachant $\{X_1 + ... + X_r = n\}$?

d) On admet que le nombre de clients entrant dans un bureau de poste en l'espace d'un jour suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note p la probabilité qu'une personne pénétrant dans ce bureau soit un homme. Alors le nombre d'hommes et celui de femmes sont indépendants et suivent chacun une loi de Poisson de paramètres respectifs $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.

Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi: $P(X = k) = 2^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer les quantités suivantes :

$$P(X = Y),\ P(X < Y),\ P(\min\{X, Y\} \leq n),\ P(X \text{ divise } Y).$$

Quelques exercices sur les variables à densité

Exercice 8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c\,\frac{\exp(-x)}{y^2} & \text{si } x > 0, \text{ et } y > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la constante c. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes?

Exercice 9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} & \text{si } (x, y) \in D = \{(x, y)\ /\ 0 < y \leq x \leq 1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Vérifier que $f_{X,Y}$ est bien une densité sur $I\!R^2$.

b) Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes?

c) Calculer $\mathbb{P}(Y < \frac{X}{2})$.

Exercice 10

On considère un vecteur aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité :

$$f_\lambda(x, y) = c_\lambda e^{-\lambda y} \mathbb{I}_D(x, y)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$.

a) Que vaut c_λ ?

b) Déterminer la loi du vecteur $(\frac{X}{Y}, Y)$.

c) Les variables $\frac{X}{Y}$ et Y sont elles indépedantes ? Déterminer leurs lois.

Exercice 11

a) Soit X et Y deux variables indépendantes de lois exponentielles de paramètre respectif $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$ et $W = V - U$. Calculer $P(U = X)$ et montrer que U et W sont indépendantes.

b) Calculer la loi de la somme de n v.a. exponentielles indépendantes de même paramètre λ.

Exercice 12

Deux personnes se donnent rendez-vous. L'heure d'arrivée de chacune de ces deux personnes sur les lieux est une variable uniforme entre midi et une heure. Ces deux variables sont indépendantes. Quelle est la probabilité qu'ils arrivent au même instant ? Quelle est la probabilité que le premier arrivé doive attendre plus de 10 minutes ? Si les deux personnes se donnent un rendez-vous plus précis, à midi exactement par exemple. La loi uniforme est-elle adaptée au problème ? Quelle autre loi peut-on utiliser ?

Exercice 13

Une usine U fabrique des lampes dont la durée de vie T en heures vérifie : $P(T > t) = e^{-\theta t}$ pour $t > 0$, avec $\theta > 0$.

a) Quelle est la loi de T?
Calculer la durée de vie moyenne de ces lampes, et l'écart type associé.

b) On considère n lampes dont les durées de vie $T_1, \ldots, T_n$ sont supposées indépendantes. On note $U = \min(T_1, \ldots, T_n)$ le premier instant où au moins une des lampes cesse de fonctionner et $V = \max(T_1, \ldots, T_n)$ le premier instant où toutes les lampes ont cessées de fonctionner.
Quelles sont les lois de U et de V ?

Exercice 14

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi commune admet pour densité la fonction d définie par $d(x) = \frac{1}{x^2}\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$. Soient $U = XY$ et $V = X/Y$.

a) Calculer la loi du couple (U, V) et ses lois marginales.

b) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?