Université de Rennes 1 **2008-2009**

CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du Problème n° 1

Partie 1 : Préambule

1) Notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

Pour $n \geq 1$ on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$ donc il est clair que la convergence de la suite (u_n) est équivalente à la convergence de la suite (S_n).

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ell n\,(n+1) + \ell n\, n = \dfrac{1}{n+1} + \ell n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

On a donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}\varepsilon(n) \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{-1}{2n^2}$.

Par suite, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge et donc la suite (u_n) converge.

Partie 2 : Théorème de sommation des équivalents

1) On a $a_n = b_n(1 + \varepsilon(n))$ avec $\varepsilon(n)$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c'est à dire $a_n - b_n = b_n\varepsilon(n)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|\varepsilon(n)| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N$ on a donc $|a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$.

Soient $M > n \geq N$. $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{M} a_k - \sum_{k=n+1}^{M} b_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{M} |a_k - b_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{M} b_k$ et donc, en passant à la limite quand M tend vers $+\infty$, $\left|R_n^a - R_n^b\right| \leq \varepsilon R_n^b$.

2) Avec les mêmes notations, $\left|S_n^a - S_n^b\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - b_k| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} b_k$.

La série positive (b_n) étant divergente, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = +\infty$ et cette somme est en particulier non nulle apcr.

On a donc $\left|\dfrac{S_n^a}{S_n^b} - 1\right| \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k|}{S_n^b} + \varepsilon \dfrac{\sum_{k=N+1}^{n} b_k}{S_n^b} \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k|}{S_n^b} + \varepsilon \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon$.

Partie 3 : Application

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^a}{a} - \dfrac{n^a}{a} = \dfrac{n^a}{a}\left(-1 + (1 + \dfrac{1}{n})^a\right)$. Comme $(1 + \dfrac{1}{n})^a = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(n)$, on a $u_{n+1} - u_n = n^{a-1} + \dfrac{n^{a-1}}{a}\varepsilon(n) \underset{n\to\infty}{\simeq} n^{a-1} = \dfrac{1}{n^{1-a}}$.

Comme $1 - a < 1$, la série positive $\sum n^{a-1}$ diverge et donc (théorème de sommation des équivalents) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{a-1} \underset{n\to\infty}{\simeq} \sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ c'est à dire $T_n \underset{n\to\infty}{\simeq} u_{n+1} - u_1$ soit finalement $T_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{n^a}{a}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(2k)^a - (2k-1)^a = (2k)^a\left\{1 - (1 - \dfrac{1}{2k})^a\right\}$ donc $(2k)^a - (2k-1)^a \underset{n\to\infty}{\simeq} (2k)^a\dfrac{a}{2k} = a(2k)^{a-1}$.

Soit d'autre part $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^a = -1^a + 2^a - 3^a + \cdots - (2n-1)^a + (2n)^a$ donc :

$S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((2k)^a - (2k-1)^a)$. Comme $a - 1 > -1$, la série $\sum(2k)^{a-1}$ diverge et donc, d'après le théorème de sommation des équivalents des séries positives, $S_{2n} \underset{n\to\infty}{\simeq} a\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^{a-1} = a2^{a-1}T_n$.

Finalement, $S_{2n} \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{1}{2}(2n)^a$.

3) On écrit $S_{2n+1} = S_{2n} - (2n+1)^a = 2^{a-1}n^a + n^a\varepsilon(n) - (2n+1)^a$ soit :
$S_{2n+1} = 2^{a-1}n^a + n^a\varepsilon(n) - 2^a n^a(1+\dfrac{1}{2n})^a = 2^{a-1}n^a + n^a\varepsilon(n) - 2^a n^a(1+\varepsilon(n))$
et donc $S_{2n+1} = 2^{a-1}n^a - 2^a n^a + n^a\varepsilon(n) = -2^{a-1}n^a + n^a\varepsilon(n)$ d'où finalement :
$S_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{(2n)^a}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{(2n+1)^a}{2}$.

Les résultats précédents permettent alors de conclure que $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n\dfrac{n^a}{2}$.