Université de Rennes 1 **2008-2009**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème n° 1

A rendre pour le jeudi 18 septembre 2008

Partie 1 : Préambule

1) Montrer que la convergence d'une suite réelle (u_n) est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

2) En déduire par exemple que la suite définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ell n\, n$ est convergente.

Partie 2 : Théorème de sommation des équivalents

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs tels que $a_n \underset{n\to\infty}{\simeq} b_n$.

1) On suppose que les deux séries convergent. Montrer que leurs restes respectifs d'ordre n sont équivalents lorsque n tend vers l'infini.

2) On suppose que les deux séries divergent. Montrer que leurs sommes partielles respectives d'ordre n sont équivalentes lorsque n tend vers l'infini.

Partie 3 : Application

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) en posant, pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n^a}{a}$. Pour $n > 0$, on note alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^a$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\simeq} n^{a-1}$. En déduire un équivalent de $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}$.

2) Trouver un équivalent de $(2k)^a - (2k-1)^a$ lorsque k tend vers $+\infty$.
En déduire que la suite (S_{2n}) diverge et trouver un équivalent de S_{2n} quand n tend vers $+\infty$.

3) Trouver un équivalent de S_n.