Chapitre 2

Probabilités sur un univers fini

2.1 Probabilité

2.1.1 Vocabulaire probabiliste

On appelle ***expérience aléatoire*** une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse prévoir lequel sera obtenu.

On appelle ***univers*** (ou encore ***ensemble fondamental***) d'une expérience aléatoire l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. Il est souvent noté Ω. Cet ensemble peut être fini, infini dénombrable, ou infini non dénombrable mais on ne s'intéressera ici qu'au cas où il est fini.
Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé ***éventualité*** ou ***issue***. C'est donc un résultat possible de l'expérience aléatoire.

Exemple. Un lancer de dé (en observant le chiffre visible) est une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Parfois, au lieu de s'intéresser à toute l'expérience, on ne s'intéresse qu'à certains résultats. On appelle ***évènement*** toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ de l'univers. C'est donc une combinaison de résultats possibles de l'expérience aléatoire.
Un évènement A est dit ***réalisé*** lorsque le résultat de l'expérience appartient à A.

Exemple. On lance deux dés distincts, l'un est rouge et l'autre est bleu et on observe les chiffres obtenus. Un résultat de l'expérience peut être vu comme un couple (i, j), avec $i \in \{1, \cdots, 6\}$ et $j \in \{1, \cdots, 6\}$, où i représente la valeur du dé rouge et j représente la valeur du dé bleu. L'univers est alors
$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \cdots, (2, 1), (2, 2), \cdots, (6, 5), (6, 6)\} = \{1, \cdots, 6\}^2$.
On peut considérer les évènements suivants :
- A : « la somme des points est égale à 6 » : $A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$,
- B : « la somme des points est un multiple de 3 » :

$$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}.$$

On appelle ***évènement impossible*** l'ensemble vide $\emptyset$, et ***évènement certain*** l'univers Ω.
On appelle ***évènement élémentaire*** un évènement qui ne contient qu'un seul élément. (En terminologie ensembliste on parle de singleton.)

2.1.2 Opérations sur les évènements

Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire d'univers Ω.

i) **Complémentaire**. Le complémentaire $\overline{A}$ de A dans Ω (aussi noté A^c) est l'***évènement contraire*** de A : $\overline{A}$ contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A, $\overline{A} = \Omega \backslash A$.
$\overline{A}$ est l'évènement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

ii) **Intersection** : L'évènement $C = A \cap B$ est réalisé lorsque A ET B sont réalisés simultanément. On parle donc de l'évènement ***« A ET B »***.

iii) ***Union*** : L'évènement $D = A \cup B$ est réalisé lorsque l'un des évènements A OU B est réalisé. On parle donc de l'évènement ***« A OU B »***

Deux évènements A et B sont dits ***incompatibles*** ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

La relation « l'évènement A implique l'évènement B » signifie que si A se réalise alors B se réalise aussi. La relation ensembliste associée est donc celle de l'inclusion : $A \subset B$.

Exemple. On jette deux dés distincts. On considère les évènements suivants : A =« la somme des points vaut 6 », B =« la somme des points est un multiple de 3 », C =« avoir au moins un 6 ». On a alors :

$$\begin{aligned}
A &= \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}\\
B &= \{(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6)\}\\
C &= \{(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}$$

On a $A \subset B$, $A \cap C = \emptyset$, et $\overline{C}$ est l'évènement « n'avoir aucun 6 ».

Définition 2.1. *Soit $A_1, \cdots, A_p$ des évènements. On dit que la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est un* ***système complet d'évènements*** *si ces évènements sont deux à deux disjoints (c'est-à-dire $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$) et si $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega$.*

Exemples.

- Pour tout évènement A, la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{\omega_, \cdots, \omega_n\}$ alors la famille $(\{\omega_i\})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'évènements.

2.1.3 Bases axiomatiques des probabilités

Considérons une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini Ω. Intuitivement, la probabilité d'un évènement est la fréquence d'apparition de cet évènement lorsqu'on réalise une infinité de fois dans les mêmes conditions l'expérience.

Définition 2.2. *On appelle* ***probabilité****, ou mesure de probabilité, sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes :*

(1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \geqslant 0$ *(positivité)*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(totalité)*

(3) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ \big(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\big).$ *(σ-additivité)*

Remarque. Lorsque Ω est muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, on dit que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé (fini).

Proposition 2.3. *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ est une suite finie d'évènements deux à deux disjoints alors on a $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

3. *Pour tout évènement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$*

4. *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$. (On dit qu'une probabilité est croissante.)*

Démonstration : 1. Il suffit de prendre $A = \Omega$ et $B = \emptyset$. 2.On procède par récurrence. 3. On remarque que $\Omega = A \cup \overline{A}$ (union disjointe). 4. On remarque que si $A \subset B$, on a $B = A \cup (B \backslash A)$ (union disjointe), où $B \backslash A = B \cap \overline{A}$. On a donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A)$. □

Exercice. Montrer que si A et B sont deux évènements alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition 2.4. *Soit A et B deux évènements quelconques, alors*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration : On décompose les évènements en unions disjointes de la manière suivante $A \cup B = A \cup (B \backslash A \cap B)$ et $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A \cap B)$. □

Exercice. Montrer que si $A_1, \cdots, A_n$ sont n évènements alors $\mathbb{P}\,(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Proposition 2.5 (Formule des probabilités totales)**.** *Si $A_1, \cdots A_p$ forment un système complet d'évènements alors, pour tout évènement B, on a :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Démonstration : On a $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. On en déduit $B = \bigcup_{i=1}^{p} B \cap A_i$ et donc le résultat annoncé par σ-additivité. □

Proposition 2.6 (Construction d'une probabilité)**.** *Si $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ et si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que :* $\quad \forall i \in [[1, n]], \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.
Cette probabilité est définie par : $\quad \forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Démonstration :

- Unicité. Si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ et si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω telle que $\forall i \in [[1, n]], \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, alors, pour $A \subset \Omega$, $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ et la σ-additivité donne bien $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.
- Existence. Il s'agit de vérifier que l'application $\mathbb{P}$ ainsi définie est bien une probabilité. On a déjà, $\forall A \subset \Omega, \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$ (car les p_i sont positifs) mais aussi $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Soit à présent A et B deux évènements incompatibles. $\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\{\omega\})$ (car A et B sont disjoints) et donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

□

Remarque. On dit parfois que la famille $\{p_1, \cdots, p_n\}$ est une ***distribution de probabilité*** sur Ω. Se donner une probabilité sur Ω revient donc à se donner une distribution de probabilité sur Ω.

Exemples. 1. On jette une pièce bien équilibrée (même chance de tomber sur pile que sur face) et on regarde la face apparente. On a $\Omega = \{P, F\}$. Comme la pièce est bien équilibrée, la probabilité liée à cette expérience vérifie $\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{F\})$. Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité, on a forcément $\mathbb{P}(\{P\}) + \mathbb{P}(\{F\}) = 1$. On en déduit que,

$$\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{2}.$$

2. Jetons une pièce biaisée de telle sorte qu'on ait deux fois plus de chance d'avoir pile que face, i.e $\mathbb{P}(\{P\}) = 2\mathbb{P}(\{F\})$. Comme $\mathbb{P}(\{P\}) + \mathbb{P}(\{F\}) = 1$, on a alors

$$\mathbb{P}(\{P\}) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{3}$$

3. On jette un dé et on regarde le chiffre de la face apparente. On a $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}$. On suppose que le dé est bien équilibré (non truqué), c'est à dire que chaque face à la même chance d'apparaître. On a donc $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$.
Soit A l'évènement « obtenir un chiffre pair », on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{2}$$

Soit B l'évènement « obtenir au moins deux ». On remarque que $\overline{B} =$« tomber sur 1 », d'où

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

2.1.4 Cas particulier de l'équiprobabilité

Considérons une expérience d'univers fini Ω, disons $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ dont chaque évènement élémentaire a la même chance d'apparaître. On dit que l'expérience est équiprobable. Comme $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \cdots = \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

Cette probabilité est appelée ***probabilité uniforme*** sur l'ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. Considérons un évènement A, on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemples. 1. On jette deux dés équilibrés distinguables (l'un rouge, l'autre bleu) et on note les chiffres qui apparaissent. On peut modéliser l'expérience en introduisant l'univers $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}^2$ constitué des couples (i, j) où i désigne le chiffre du dé rouge et j celui du bleu. Les dés étant équilibrés, l'expérience est équiprobable et on a donc

$$\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36} \text{ pour tout } (i, j) \in \Omega$$

2. On jette maintenant deux dés équilibrés et parfaitement identiques et on note les chiffres qui apparaissent. On peut modéliser l'expérience en introduisant l'univers

$$\Omega' = \Big\{(i,j) \in \{1,\cdots,6\}^2 \text{ tels que } i \leqslant j\Big\} = \{(1,1),\cdots,(1,6),(2,2),\cdots,(5,5),(5,6),(6,6)\}$$

Le cardinal de Ω' est 21. On souhaite munir l'espace Ω' d'une probabilité $\mathbb{P}'$, mais il n'y a cette fois-ci aucune raison de supposer l'expérience équiprobable.
Cependant, on peut faire le lien avec l'expérience précédente en mettant un point de couleur sur l'un des dés. Cela ne change pas le déroulement de l'expérience, mais les dés étant maintenant distinguables on se retrouve dans le cas précédent où l'on connaît la probabilité de chaque événement élémentaire. On introduit alors l'univers $\Omega = \{1,\cdots,6\}^2$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Le lien entre les espaces $(\Omega',\mathbb{P}')$ et $(\Omega,\mathbb{P})$ est le suivant : pour $i<j$, on a

$$\mathbb{P}'(\{(i,j)\}) = \mathbb{P}(\{(i,j\}) + \mathbb{P}(\{(j,i)\}) = \frac{1}{18}$$

et $\mathbb{P}'(\{(i,i)\}) = \mathbb{P}(\{(i,i)\}) = \frac{1}{36}$.
De manière générale, dans le cas d'un univers fini et lorsque cela est possible, on essaye de se ramener à des expériences équibrobables afin de simplifier la modélisation.

Exemple. On jette deux dés équilibrés et on cherche la probabilité que la somme des chiffres soit égale à 7. Les dés ne sont pas supposés distincts, mais dans l'exemple précédent on a vu qu'on pouvait se ramener au cas de dés distincts. On considère $\Omega = \{1,\cdots,6\}^2$ avec $\mathrm{card}(\Omega) = 36$ et donc $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, d'où $\mathbb{P}(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

2.2 Probabilités conditionnelles

2.2.1 Introduction

Prenons un exemple simple : on lance successivement deux dés équilibrés et on observe la somme des chiffres apparents. On modélise l'expérience, comme déjà vu, par le couple $(\Omega,\mathbb{P})$ où $\Omega = \{1,\cdots,6\}^2$ et $\mathbb{P}$ est la probabilté uniforme. Si A désigne l'évènement « La somme vaut 6 », on a $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ et donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{36}$. Supposons maintenant que l'on ait une information supplémentaire : on sait que le premier dé est tombé sur la face 2. Si B désigne l'évènement « Le premier lancer donne 2 »(on a donc $B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6\})$, les cas favorables ne sont plus qu'au nombre de un : $(2,4)$ (c'est le seul élément de $A\cap B$) tandis que les cas possibles sont ceux de B. La probabilité d'obtenir une somme de 6 sachant que le premier dé est tombé sur 2 vaut donc $\dfrac{1}{6} = \dfrac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(B)}$. C'est la probabilité de A sachant B. Généralisons à présent cet exemple.

2.2.2 Définition et premières propriétés

Définition 2.7. *Soit A et B deux évènements avec $P(B) \neq 0$. La* ***probabilité conditionnelle*** *de A sachant B, notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, est définie par :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple. On jette deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on cherche la probabilité que les deux jets donnent face sachant que le premier a donné face. On modélise l'expérience en introduisant l'univers $\Omega = \{(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)\}$ que l'on munit de la probabilité

uniforme (la pièce étant équilibrée, les résultats sont équiprobables). On introduit les évènements suivants A : « les deux jets donnent face », B : « le premier jet donne face ».
En utilisant, la formule de la définition, on a $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Cependant on remarque que si l'on sait que le premier jet donne face, tout l'aléa de l'expérience est dans le second lancer. Sachant que le premier dé donne face, on peut considérer l'univers $\Omega' = \{(F, F), (F, P)\}$. Ayant autant de chance que le second lancer donne face que pile, on a donc $\mathbb{P}_B(A) = 1/2$. On retrouve le même résultat.
On s'intéresse maintenant à la probabilité que les deux jets donnent face sachant qu'au moins un des jets donne face. On note C l'évènement « au moins un des jets donne face ». D'après la formule, on a

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Sachant qu'au moins un des jets donne face, l'aléa repose sur l'autre jet et on peut considérer l'univers $\Omega' = \{(F, F), (F, P), (P, F)\}$ et donc $\mathbb{P}_C(A) = \frac{1}{3}$.

Proposition 2.8. *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* B *un évènement tel que* $\mathbb{P}(B) \neq 0$. *Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_B : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration :

- Il est clair que $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}_B(A) \geqslant 0$,
- On a bien $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$,
- Soit alors $(A, A') \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ avec $A \cap A' = \emptyset$.

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}((A \cup A') \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A' \cap B))}{\mathbb{P}(B)}.$$

Comme $A \cap B$ et $A' \cap B$ sont disjoints, on en déduit

$$\mathbb{P}_B(A \cup A') = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A').$$

□

Remarque. On a $\mathbb{P}_B(B) = 1$: tout le poids de la probabilité est porté par B.

2.2.3 Différentes formules

Proposition 2.9 (Formule des probabilités totales - Version 2)**.** *Si* $B_1, \cdots B_p$ *forment un système complet d'évènements et sont tous de probabilité non nulle alors, pour tout évènement* A, *on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}_{B_i}(A).\mathbb{P}(B_i).$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la première version de cette formule et la définition de la probabilité conditionnelle. □

Exemple. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en deux classes : ceux qui sont enclins aux risques cardio-vasculaires (ie., à haut risque) et ceux qui ne le sont pas (i.e., à risque modéré). Elle constate que ceux à haut risque ont une probabilité de 0.4 d'avoir un accident dans l'année, tandis que ceux à risque modéré ont une probabilité de 0.05. On suppose que 30% de la population est à haut risque. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré ait un accident cardio-vasculaire durant l'année qui suit la signature de son contrat ?

On note A l'évènement « l'assuré a un accident pendant l'année » et B l'évènement « l'individu est à haut risque ». Alors d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(A) = 0.4 \times 0.3 + 0.05 \times 0.7 = 0.155$$

Proposition 2.10 (Probabilités composées). *Soit $A_1, \cdots, A_{p-1}$ des évènements dont l'intersection est de probabilité non nulle et soit A_p un évènement. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p).$$

Démonstration : On procède par récurrence □

Remarque. Ce résultat justifie le calcul des probabilités à l'aide d'un arbre de probabilité.

Proposition 2.11 (Formule de Bayes). *Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulle alors on a :* $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})}$.
Plus généralement, si $B_1, \cdots B_p$ forment un système complet d'évènements et sont tous de probabilité non nulle et si A est un évènement de probabilité non nulle alors :

$$\mathbb{P}_A(B_i) = \frac{\mathbb{P}_{B_i}(A)\mathbb{P}(B_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}_{B_i}(A)\mathbb{P}(B_i)}$$

Démonstration : Il suffit d'écrire $\mathbb{P}_A(B_i) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}_{B_i}(A)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)}$ et d'utiliser la formule des probabilités totales. □

Remarque. La formule de Bayes permet de calculer les probabilités a posteriori d'un évènement en fonction des probabilités a priori de cet évènement c'est-à-dire connaitre $\mathbb{P}_A(B)$ quand on connait $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$. La formule de Bayes est donc souvent utilisée pour calculer des probabilitès de causes dans des diagnostics (maladies, pannes, etc.).

Remarque. La formule de Bayes est à la base de toute une branche de la statistique appelée statistique bayesienne.

Exemple. Un étudiant répond à une question à choix multiples, m réponses sont proposées. Il connait la réponse avec une probabilité p. Dans le cas contraire, il choisit au hasard la réponse (avec une probabilité $1 - p$). Quelle est la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse s'il y a répondu correctement ?

$$\mathbb{P}_B(C) = \frac{\mathbb{P}_C(B)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}_C(B)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{\overline{C}}(B)(1 - \mathbb{P}(C))} = \frac{1 \times p}{p + (1-p)/m}$$

Si $p = 1/2$ et $m = 4$, alors $\mathbb{P}_B(C) = 4/5$.

2.3 Indépendance d'évènements

Dans le langage courant, on dit de deux évènements qui ne sont pas liés entre eux qu'ils sont indépendants. Par conséquent, on a tendance à dire que si A et B sont indépendants, la connaissance de B ne donne aucune information utile pour la connaissance de l'évènement A et donc de manière naturelle $\mathbb{P}_B(A)$ doit être égale à $\mathbb{P}(A)$, i.e. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. On va donner à partir de cette constatation la définition mathématique de l'indépendance.

Définition 2.12. *Deux évènements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Attention ! Les notions d'évènements indépendants et d'évènements disjoints n'ont aucun rapport. Par exemple, si on jette deux dés et on considère les évènements A =« le premier dé vaut 3 » et B =« le deuxième dé vaut 1 ». Les évènements sont indépendants car on jette les dés de façon indépendante, mais les évènements ne sont pas disjoints car l'évènement $A \cap B =$ « le premier dé vaut 3 et le deuxième vaut 1 » est possible.

Proposition 2.13. *Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.*

Démonstration : On écrit A comme l'union de deux évènements disjoints : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. D'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$. Ce qui implique que $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$ et donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. □

Définition 2.14. *On considère n évènements $A_1, \cdots, A_n$. Ces évènements sont dits **mutuellement indépendants** si pour tout $k \leqslant n$, pour tout $i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\}$ distincts on a $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$.*
Par exemple, A, B et C sont trois évènements mutuellement indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Remarque. Si des évènements sont mutuellements indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse. Par exemple, si on jette deux dés, l'un rouge l'autre bleu et si on considère les évènements suivants : $A = \{$le dé rouge donne un chiffre impair$\}$ $B = \{$le dé bleu donne un chiffre impair$\}$ $C = \{$la somme des deux dés est un chiffre impair$\}$ A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.