Cinquième séance de compléments d'algèbre
Feuille de préparation

- Rappeler les définitions d'une forme bilinéaire (symétrique) sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, du noyau d'une telle forme φ, de l'orthogonalité au sens de φ. Si A est une partie non vide de E, qu'appelle-t-on $A^\perp$? Vérifier que c'est toujours un sous-espace vectoriel de E.

- Qu'est-ce qu'une forme quadratique q sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ? Rappeler la définition du cône isotrope de q. Donner des exemples en dimension finie.

- Rappeler le principe de la réduction d'une forme quadratique (en dimension finie) en carrés de Gauss ainsi que le principe d'orthogonalisation de Schmidt.
  Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ contenant une base du sous-espace engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ où $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1,0)$, $\overrightarrow{v_3} = (0,0,1,1)$.

- Rappeler le théorème d'inertie de Sylvester pour une forme quadratique dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Qu'appelle-t-on signature d'une telle forme ? Donner des exemples.

- Donner les définitions d'un produit scalaire, d'un espace euclidien.
  La forme quadratique q_0 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q_0(\beta,\gamma,\delta) = 3(\beta^2+\gamma^2+\delta^2) - 2(\gamma\delta+\delta\beta+\beta\gamma)$ est-elle définie positive ? *(Deuxième épreuve 2000)*

- Préparer les exercices 49 à 57 de la feuille d'exercices.