Quatrième séance de compléments d'algèbre
Feuille de préparation

- Rappeler les définitions d'un espace-vectoriel et d'un sous-espace vectoriel. Quand dit-on que deux sous-espaces sont en somme directe ? Qu'ils sont supplémentaires ?
  Vérifier que dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices anti-symétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

- Rappeler le théorème de la base incomplète. Donner des exemples.

- Qu'appelle-t-on valeur propre et sous-espace propre associé d'un endomorphisme ? D'une matrice carrée ? Donner la définition de deux matrices carrées semblables. Interpréter en termes d'endomorphismes.

- Quand dit-on qu'un endomorphisme (resp. une matrice) est diagonalisable ? Qu'il est trigonalisable ?
  Diagonaliser la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. *(Deuxième épreuve 1990)*

- Énoncer le théorème des noyaux itérés pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. En donner une démonstration.

- Qu'appelle-t-on polynôme annulateur d'un endomorphisme u du $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie) E ? Qu'est-ce que le polynôme minimal de u ? Le polynôme caractéristique de u ?
  Vérifier qu'un endomorphisme u est un isomorphisme si et seulement si la valuation de son polynôme minimal est nulle.

- Rappeler le théorème Cayley-Hamilton.

- Rappeler les principes de la décomposition suivant les sous-espaces caractéristiques (décomposition de Dunford). Énoncer le théorème correspondant.

- Préparer les exercices 35 à 48 de la feuille d'exercices.