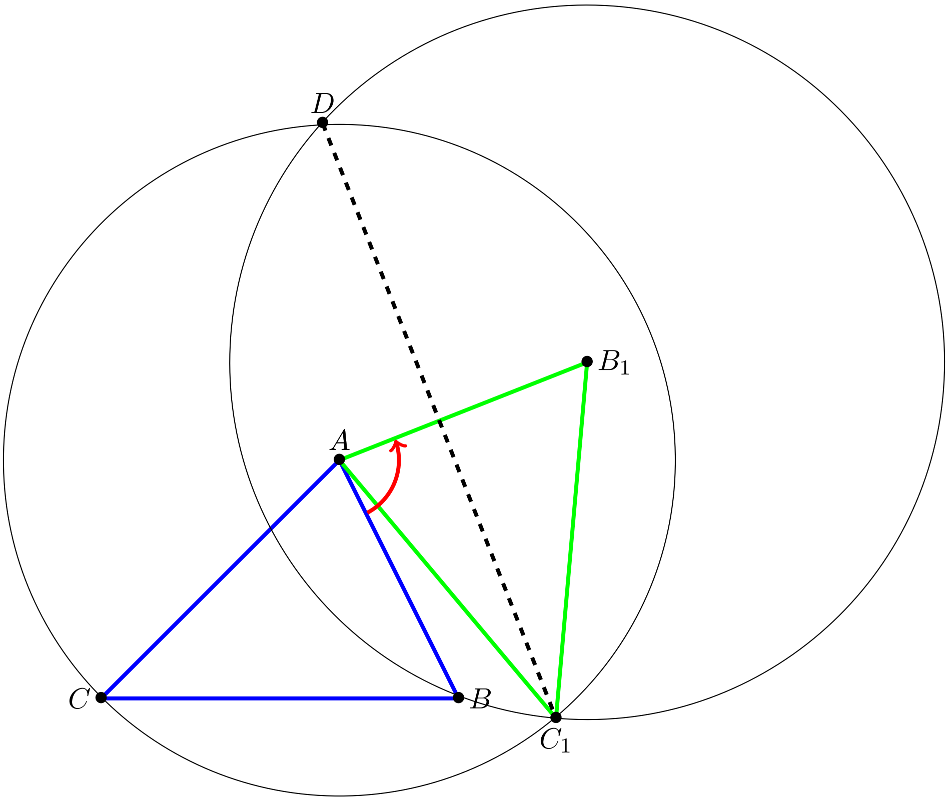
Université de Rennes

Algébre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le vendredi 31 mars 2023

1) Le sens direct résulte de la définition même d'une isométrie.
Étudions la réciproque. On considère la translation $t_{\overrightarrow{A'A}}$ qui envoie A' sur A. On note $B_1 = t_{\overrightarrow{A'A}}(B')$ et $C_1 = t_{\overrightarrow{A'A}}(C')$. Soit alors r alors la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}})$. (On a donc $r(A) = A$.) Comme $AB_1 = A'B' = AB$, on a $r(B) = B_1$. Notons D l'image par r du point C. On a donc $AD = AC$ (donc D est sur le cercle de centre A et de rayon $AC = AC_1$) et $DB_1 = r(C)r(B) = CB = C_1B_1$ (donc D est sur le cercle de centre B_1 et de rayon $B_1C_1 = BC$). Ces deux cercles se rencontrent en au plus deux points (l'un étant C_1) symétriques par rapport à (AB_1). On a alors :

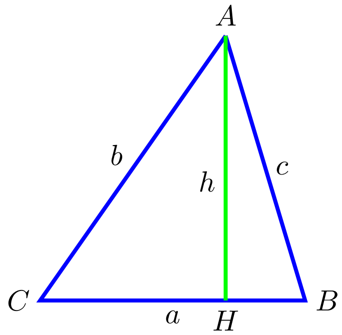
- Ou bien $r(C) = C_1$. L'isométrie (directe) $t_{\overrightarrow{AA'}} \circ r$ envoie alors A sur A', B sur B' et C sur C'.
- Ou bien $D \neq C$. L'isométrie (indirecte) $t_{\overrightarrow{AA'}} \circ s_{(AB_1)} \circ r$ envoie alors A sur A', B sur B' et C sur C'. (En effet, A et B_1 sont des points fixes de $s_{(AB_1)}$.)

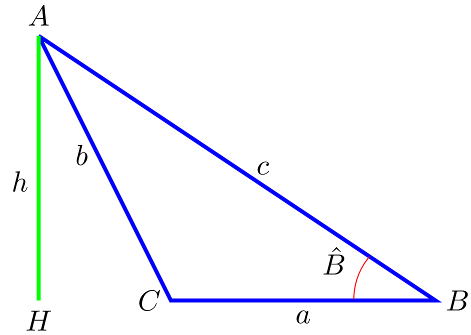


2)

a) Une similitude du plan est la composée d'une homothétie et d'une isométrie. Une similitude directe conserve donc les angles orientés de vecteurs tandis qu'une similitude indirecte inverse ces mêmes angles. En particulier, toute similitude du plan conserve les angles géométriques et on a donc bien $i) \Rightarrow ii)$.

b) Supposons donc $ii)$. En notant H (resp. H') le pied de la hauteur issue de A (resp. A') dans le triangle ABC (resp. $A'B'C'$), la trigonométrie dans le triangle permet d'écrire $\sin \widehat{C} = \dfrac{h}{b} = \sin \widehat{C'} = \dfrac{h'}{b'}$ et de même $\sin \widehat{B} = \dfrac{h}{c} = \dfrac{h'}{c'}$. On en déduit $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$. De même $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$. Les longueurs des côtés de ABC sont donc proportionnelles aux longueurs des côtés de $A'B'C'$.





On pouvait bien sûr aussi utiliser la loi des sinus.

c) Posons $k = \dfrac{a'}{a}$. L'image du triangle ABC par l'homothétie de centre A' et de rapport k est alors un triangle $A''B''C''$ isométrique à $A'B'C'$. En notant i une isométrie qui envoie $A''B''C''$ sur $A'B'C'$ (une telle isométrie existe d'après 1)), la similitude $s = i \circ h$ envoie ABC sur $A'B'C'$.

d) Puisque $i) \Rightarrow ii)$ et $ii) \Rightarrow iii)$, on a par transitivité $i) \Rightarrow iii)$. Comme $iii) \Rightarrow i)$ on a finalement $i) \Leftrightarrow iii)$. De même $i) \Leftrightarrow ii)$.
Chacune des trois propriétés peut donc servir de définition de la notion de triangles semblables.