UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 24 septembre 2019

Exercice

1) $\mathscr{E}(a,b,c)$ est une partie non vide (car contenant la suite nulle) du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. Si u et v sont deux suites de $\mathscr{E}(a,b,c)$ et λ et μ deux complexes alors, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a(\lambda u+\mu v)_{n+2}+b(\lambda u+\mu v)_{n+1}+c(\lambda u+\mu v)_n &= a(\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2})+b(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})+c(\lambda u_n+\mu v_n)\\ &= \lambda(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n)+\mu(av_{n+2}+bv_{n+1}+cv_n)\\ &= \lambda(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n)+\mu(av_{n+2}+bv_{n+1}+cv_n)=0 \end{aligned}$$

donc $\lambda u+\mu v\in\mathscr{E}(a,b,c)$ qui est donc bien un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel.

2) Soit $(x,y)\in\mathbb{C}^2$. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété :

$$« \ \exists!(u_0,\cdots,u_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+2},\ \begin{cases}\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ au_{k+2}+bu_{k+1}+cu_k=0\\ u_0=x\quad u_1=y\end{cases} \ »$$

- *(initialisation)* Il est clair que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $\exists!(u_0,\cdots,u_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+2},\ \begin{cases}\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ au_{k+2}+bu_{k+1}+cu_k=0\\ u_0=x\quad u_1=y\end{cases}$.
  Posons alors (puisque $a\neq 0$) $u_{n+2}=\dfrac{1}{a}(-bu_{n+1}-cu_n)$. Ce choix est clairement le seul possible pour obtenir la relation désirée. On a alors bien $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $au_{k+2}+bu_{k+1}+cu_k=0$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- *(conclusion)* Le théorème de récurrence montre alors le résultat annoncé : il existe un unique élément $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}(a,b,c)$ tel que $u_0=x$ et $u_1=y$.

3) La question précédente montre que F est bien une application.
• Soit $u\in\mathscr{E}(a,b,c)$. Par définition, $F(u_0,v_0)$ est l'unique suite v de $\mathscr{E}(a,b,c)$ telle que $v_0=u_0$ et $v_1=u_1$. Par unicité $v=u$ et donc $F(u_0,v_0)=u$. On a montré que F est surjective.
• Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{C}^2$. Si $F(x,y)=F(x',y')$ alors ces deux suites ont les mêmes deux premiers termes et en particulier $(x,y)=(x',y')$. On a montré que F est injective.
• Montrons à présent que F est linéaire. Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{C}^2$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. $F((x,y)+\lambda(x',y'))=F((x+\lambda x',y+\lambda y'))$ est l'unique suite u de $\mathscr{E}(a,b,c)$ telle que $u_0=x+\lambda x'$ et $u_1=y+\lambda y'$. Or la suite $F(x,y)+\lambda F(x',y')$ est dans $\mathscr{E}(a,b,c)$ et a pour premiers termes $x+\lambda x'$ et $y+\lambda y'$. Par unicité $F((x,y)+\lambda(x',y'))=F(x,y)+\lambda F(x',y')$.
Finalement F est un isomorphisme et par suite $\mathscr{E}(a,b,c)$ est de dimension 2 (comme $\mathbb{C}^2$).

4) Soit $r\in\mathbb{C}^*$. La suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathscr{E}(a,b,c)$ si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}\quad r^n(ar^2+br+c)=0$ soit $ar^2+br+c=0$.
Remarque : Si 0 est racine du polynôme caractéristique (i.e. si $c=0$), la relation de récurrence se résume à $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=-\dfrac{b}{a}u_{n+1}$ et donc $\forall n\geqslant 2\quad u_n=(-\frac{b}{a})^{n-1}u_1$. Une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$ est alors (v,w) où v désigne la suite géométrique de raison $-\frac{b}{a}$ (et de premier terme 1) et w la suite telle que $w_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n=0$ (toute suite u de $\mathscr{E}(a,b,c)$ s'écrivant alors $u=u_1v+u_0w$).
On supposera dans toute la suite que $c\neq 0$.
• Si $b^2-4ac\neq 0$, le polynôme caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. Les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathscr{E}(a,b,c)$ et forment une famille libre puisque

$$\begin{aligned}\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}} &\implies \begin{cases}\lambda+\mu=0 & (n=0)\\ \lambda r_1+\mu r_2=0 & (n=1)\end{cases}\\ &\implies \lambda=\mu=0\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{E}(a,b,c)$ est de dimension 2, on en déduit que $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$.
• Si $b^2-4ac=0$, soit r la racine double du polynôme caractéristique.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a(n+2)r^{n+2}+b(n+1)r^{n+1}+cnr^n=r^n\left[n(ar^2+br+c)+2ar^2+br\right]=0$$

puisque $r=-\frac{b}{2a}$. Les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc dans $\mathscr{E}(a,b,c)$. Or,

$$\begin{aligned}\lambda(r^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}\quad&\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\lambda=0 & (n=0)\\ \lambda r+\mu r=0 & (n=1)\end{array}\right.\\ &\Longrightarrow\lambda=\mu=0\end{aligned}$$

Les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment donc une famille libre donc une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$.

5) L'équation caractéristique correspondant à la suite de Fibonacci est $r^2=r+1$ qui admet deux racines réelles distinctes $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 4)a) prouve alors l'existence de deux éléments α et β de $\mathbb{C}$ tels que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_n=\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Les valeurs de u_0 et u_1 conduisent à $\alpha+\beta=0$ et $\alpha(1+\sqrt{5})+\beta(1-\sqrt{5})=2$ et finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.