

Algèbre et Géométrie 1

Problème à rendre pour le 24 septembre 2019

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. On note $\mathcal{E}(a, b, c)$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

- 1) Montrer que $\mathcal{E}(a, b, c)$ est un espace vectoriel.
- 2) Montrer pour tout x et tout y de \mathbb{C} , il existe un unique élément $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}(a, b, c)$ tel que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. On note $F(x, y)$ cet élément.
- 3) Montrer que l'application $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{E}(a, b, c), (x, y) \mapsto F(x, y)$ est un isomorphisme de \mathbb{C}^2 sur $\mathcal{E}(a, b, c)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(a, b, c)$.
- 4) Soit $r \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{E}(a, b, c)$ si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique $(C) : ax^2 + bx + c = 0$.
 - a) On suppose que l'équation (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{C} . Montrer que les deux suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de $\mathcal{E}(a, b, c)$.
 - b) On suppose que l'équation (C) admet une racine double r non nulle. Montrer que les deux suites $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de $\mathcal{E}(a, b, c)$.
- 5) On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Pour tout entier naturel n , expliciter u_n en fonction de n .