Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème de géométrie n°2

1)

a) On a $(r \circ \sigma_x \circ r^{-1})^2 = r \circ \sigma_x \circ r^{-1} \circ r \circ \sigma_x \circ r^{-1} = id$. L'isométrie $r \circ \sigma_x \circ r^{-1}$ est donc involutive (et distincte de l'identité). De plus, $r \circ \sigma_x \circ r^{-1}(r(x)) = r(x)$. Finalement, $r \circ \sigma_x \circ r^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $r(x)$: $r \circ \sigma_x \circ r^{-1} = \sigma_{r(x)}$.

b) On peut, sans restriction, supposer x et y de même norme (car, pour $\lambda \neq 0$ on a $\sigma_{\lambda y} = \sigma_y$).

Soit alors $\mathcal{P}$ un plan de E contenant x et y. Soit $\tilde{r}$ l'unique rotation de $\mathcal{P}$ envoyant x sur y. Si z est un vecteur non nul orthogonal à $\mathcal{P}$ et si θ désigne l'angle de $\tilde{r}$ ($\mathcal{P}$ étant orienté par le choix de z), la rotation $r = r_{\mathbb{R}z,\theta}$ vérifie bien $r(x) = y$. Pour ce choix de r, on a $r \circ \sigma_x \circ r^{-1} = \sigma_y$.

<u>Autre méthode :</u> Posons $m = \dfrac{x+y}{2}$. Comme $< \dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2} > = \dfrac{1}{4}(\|x\|^2 - \|y\|^2) = 0$ (cf ci-dessus), $\dfrac{x-y}{2} \in (\mathbb{R}m)^{\perp}$. Par suite, $\sigma_m(x) = \sigma_m\left(\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = y$. On peut donc aussi choisir $r = \sigma_m$.

2)

a) On peut par hypothèse considérer un élément $r = r_{D,\theta}$ de $G \backslash \{id_E\}$. Quitte à changer l'orientation de D, on peut supposer $\theta \in]0, \pi]$.

Si $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, il n'y a rien à faire puisque $\forall u \in D^{\perp},\ <u, r(u)> = \|u\|^2 \cos\theta \leq 0$.

Sinon, soit k le plus petit entier naturel tel que $k\theta \geq \frac{\pi}{2}$. Alors $(k-1)\theta < \frac{\pi}{2}$ donc $k\theta < \frac{\pi}{2} + \theta < \pi$ et finalement $k\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$. Le résultat en découle puisque $k\theta$ est l'angle de la rotation $r^k \in G \backslash \{id_E\}$.

b) Fixons nous un $u \in D^{\perp} \backslash \{0\}$ tel que $<u, r(u)> \leq 0$ (c'est possible d'après la question précédente) et soit w un vecteur directeur de D. On cherche v sous la forme $v = \lambda u + \mu w$. On a alors $<v, r(v)> = <\lambda u + \mu w, \lambda r(u) + \mu r(w)> = \lambda^2 <u, r(u)> + \lambda\mu\,(<w, r(u)> + <u, w>) + \mu^2 <w, w>$ car $r(w) = w$. Or, $r(u) \in D^{\perp}$ donc $<v, r(v)> = \lambda^2 <u, r(u)> + \mu^2 <w, w>$. Il suffit pour conclure de choisir par exemple $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{\dfrac{-<u, r(u)>}{<w, w>}}$.

c) D'après 1)a), on a $\sigma_v \circ r \circ \sigma_v \circ r^{-1} = \sigma_v \circ \sigma_{r(v)}$ et par construction de v, $r(v) \perp v$. Si w désigne un vecteur non nul orthogonal à v et à $r(v)$, alors $\sigma_v \circ \sigma_{r(v)}(w) = \sigma_v(-w) = w$. Finalement, $\sigma_v \circ r \circ \sigma_v \circ r^{-1}$ est le retournement d'axe $\mathbb{R}w$. Le lecteur, pour s'en convaincre, pourra par exemple écrire $E = \mathbb{R}w \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\{v, r(v)\}$.

3) Soit donc G un sous-groupe distingué de $\mathcal{R}$. Supposons $G \neq \{id_E\}$. D'après la question 2.c), il existe alors r dans G et un vecteur non nul v tel que $\sigma_v \circ r \circ \sigma_v \circ r^{-1}$ soit un retournement. Or, G étant distingué $\sigma_v \circ r \circ \sigma_v = \sigma_v \circ r \circ \sigma_v^{-1} \in G$ et donc $\sigma_v \circ r \circ \sigma_v \circ r^{-1} \in G$ (G est un groupe) : G contient un retournement σ_x. D'après 1.b), tout retournement σ_y peut s'écrire $\sigma_y = r \circ \sigma_x \circ r^{-1}$ pour un certain r de $\mathcal{R}$ donc est aussi dans G (qui est distingué). Les retournements engendrant $\mathcal{R}$, on a finalement $G = \mathcal{R}$.