Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème de géométrie n°2

A rendre pour le jeudi 2 décembre 2009

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{O}^+(E)$ le groupe des rotations d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. On rappelle que $\mathcal{R}$ est engendré par les retournements (demi-tours).
Le but du problème est de montrer que $\mathcal{R}$ est un groupe simple c'est à dire que ses seuls sous-groupes distingués sont $\{id_E\}$ et $\mathcal{R}$ lui-même.

1) Pour tout vecteur non nul x de E, on note σ_x la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par x (retournement d'axe $\mathbb{R}x$). Soient $x, y \in E\backslash\{0\}$.

a) Soit $r \in \mathcal{R}$. Déterminer la nature de la transformation $r \circ \sigma_x \circ r^{-1}$.

b) En déduire l'existence d'un r de $\mathcal{R}$ tel que $r \circ \sigma_x \circ r^{-1} = \sigma_y$.

2) Soit G un sous-groupe de $\mathcal{R}$, $G \neq \{id_E\}$.

a) Montrer qu'il existe un élément $r = r_{D,\theta}$ de $G\backslash\{id_E\}$ tel que $\forall u \in D^{\perp},\ <u,\, r(u)> \leq 0$.

On pourra, par exemple, composer une rotation de G avec elle-même jusqu'à obtention d'un "bon" angle.

b) Montrer alors l'existence d'un vecteur non nul v tel que $<v,\, r(v)> = 0$ *(on pourra chercher un tel v sous la forme $v = \lambda u + \mu w$ où w dirige D).*

c) Décrire alors l'isométrie $\sigma_v \circ r \circ \sigma_v \circ r^{-1}$.

3) Soit G un sous-groupe distingué de $\mathcal{R}$: $\forall f \in \mathcal{R}, \forall g \in G,\ f \circ g \circ f^{-1} \in G$.

Montrer que ou bien $G = \{id_E\}$ ou bien $G = \mathcal{R}$.