UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 26 novembre 2020

Il s'agissait dans cet exercice de définir la notion de triangles semblables et d'en donner les principales caractérisations. Il ne fallait donc pas supposer connue cette notion pas plus que celle de triangles « égaux ».

1) • On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{A'A}$. On a alors $t(A') = A$ (que l'on note A_1). Notons $B_1 = t(B')$ et $C_1 = t(C')$. $A_1B_1C_1$ est donc l'image de $A'B'C'$ par la translation t. (1)

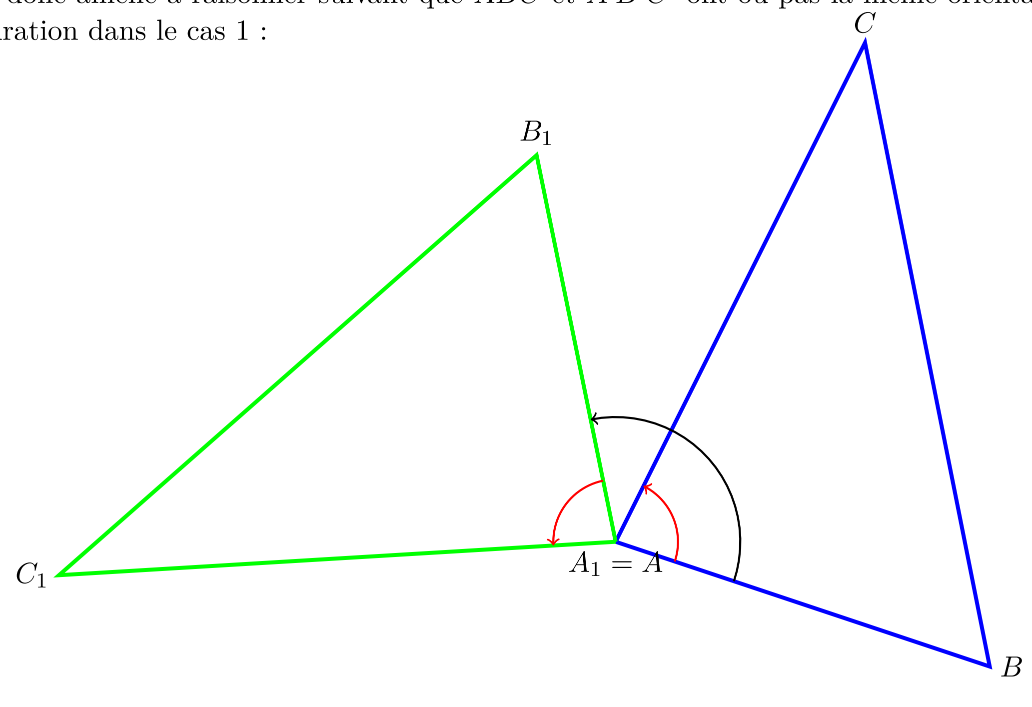
• On considère alors r la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB_1}})$. Par définition, on a $r(A) = A_1$ et $r(B) = B_1$.

Par définition, $Ar(C) = AC$: $r(C)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AC. De plus r est une isométrie donc $B_1r(C) = r(B)r(C) = BC$ soit $B_1r(C) = B_1C_1$ (car $BC = B'C'$ et t est une isométrie) : $r(C)$ appartient au cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B_1 et de rayon B_1C_1. $r(C)$ est donc un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$. Ces deux cercles s'intersectent en au plus deux points : C_1 et le symétrique C_1' de C_1 par rapport à (A_1B_1). Deux cas sont alors possibles :

<u>Cas1</u> : $r(C) = C_1$. $A_1B_1C_1$ est alors l'image de ABC par la rotation r et donc, compte tenu de (1), $A'B'C'$ est l'image de ABC par l'isométrie $t^{-1} \circ r$.

<u>Cas 2</u> : $r(C) = C_1'$. Si s est la réflexion d'axe (A_1B_1) ona alors $s \circ r(C) = C_1$ mais aussi $s \circ r(B) = s(B_1) = B_1$ et $s \circ r(A_1) = s(A_1) = A_1$. Compte tenu de (1), $A'B'C'$ est alors l'image de ABC par l'isométrie $t^{-1} \circ s \circ r$.

Autre méthode : On pouvait aussi utiliser le théorème d'Al-Kashi pour montrer que les angles orientés de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1}})$ ont même cosinus et sont donc soit égaux (cas 1) soit opposés (cas 2).
On est donc amené à raisonner suivant que ABC et $A'B'C'$ ont ou pas la même orientation. Voici la configuration dans le cas 1 :

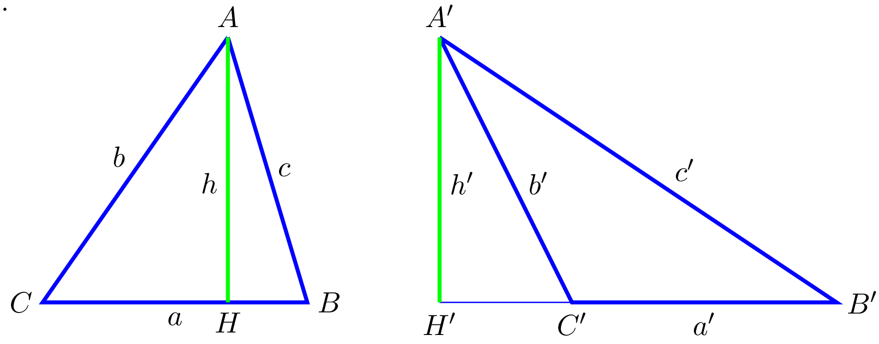


Troisième méthode : On pouvait aussi procéder par disjonction de cas en ramenant d'abord A' en A (s'ils sont distincts) par une réflexion et continuer la disjonction. On trouvait alors une isométrie solution comme composée de une à trois réflexions.

2)

a) Une similitude directe conserve les angles orientés de vecteurs tandis qu'une similitude indirecte les inverses. Une similitude conserve donc toujours les angles géométriques. En particulier, si $A'B'C'$ est l'image de ABC par une similitude du plan, $A'B'C'$ et ABC ont des angles (géométriques) deux à deux égaux. On a bien montré $i) \Rightarrow ii)$.

b) Supposons donc que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Notons H (respectivement H') le pied de la hauteur issue de A (respectivement A')) dans le triangle ABC (respectivement $A'B'C'$) et posons $h = AH$ et $h' = A'H'$. On a alors $\sin \widehat{C} = \dfrac{h}{b} = \sin \widehat{C'} = \dfrac{h'}{b'}$ et de même $\sin \widehat{B} = \dfrac{h}{c} = \dfrac{h'}{c'}$. On en déduit $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$. De même $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$.



Les longueurs des côtés de ABC sont donc proportionnelles aux longueurs des côtés de $A'B'C'$. On a montré $ii) \Rightarrow iii)$.

c) Supposons donc les longueurs des côtés de ABC proportionnelles aux longueurs des côtés de $A'B'C'$. Posons $k = \dfrac{a}{a'}$ (avec les notations précédentes). L'image du triangle $A'B'C'$ par l'homothétie de centre A et de rapport k est alors un triangle isométrique à ABC. La question 1) nous permet alors de considérer une isométrie i telle que $h(A')h(B')h(C') = i(A)i(B)i(C)$. La similitude $s = h^{-1} \circ i$ est alors telle que $A'B'C' = s(A)s(B)s(C)$. On a montré $iii) \Rightarrow i)$.

d) La transitivité de l'implication permet alors de conclure : $ii) \Leftrightarrow i) \Leftrightarrow iii)$.