Université de Rennes

Analyse et Probabilités 1

Corrigé de l'exercice de probabilités à rendre pour le 18 octobre 2024

On suppose $n \geqslant 2$.

1) On numérote les k personnes et on attribue à chacune un entier de $[\![1,n]\!]$ correspondant à son jour anniversaire (les jours de l'année sont numérotés de 1 à n). On considère donc comme univers l'ensemble des k-listes de $[\![1,n]\!]$. Card $(\Omega) = n^k$.
Les naissances étant supposées parfaitement réparties, on munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

2) Soit A l'événement : « personne n'a le même jour anniversaire ». Choisir un élément de A c'est choisir une suite ordonnée de k dates anniversaires distinctes parmi n. A apparaît donc comme l'ensemble des k-arrangements de $[\![1,n]\!]$.

— Il est clair que pour $k > n$, $A = \emptyset$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.

— Pour $k \leqslant n$, $\text{Card}(A) = A_n^k$ et donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_n^k}{n^k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\, n^k}$.

L'événement « Au moins deux personnes ont même jour anniversaire » n'est autre que $\overline{A}$ et sa probabilité $p(k)$ est donc $p(k) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n!}{(n-k)!\, n^k}$ si $k \leqslant n$.

3) Pour $n = 365$ on obtient $p(23) \simeq 0,507$, $p(55) \simeq 0,986$ et $p(68) \simeq 0,999$.
On constate donc deux choses :

— Il suffit de 23 personnes pour avoir plus d'une chance sur deux qu'il y ait une coïncidence de dates d'anniversaires. Ce résultat incontestable n'est pourtant pas très intuitif...

— s'il faut au moins 366 personnes pour que l'événement soit sûr, il en suffit de beaucoup moins pour que l'événement soit <u>très fortement</u> probable.