

PRA1 - Probabilités

Exercice à rendre pour le jeudi 20 octobre 2022

Pour n et p entiers naturels non nuls, on note $S(n, p)$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, p\}$.

Dans tout l'exercice, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

- 1) Montrer que si $n < p$ alors $S(n, p) = 0$. **On supposera désormais $n \geq p$.**
- 2) Démontrer que $S(n, n) = n!$ et que $S(n, 1) = 1$.
- 3) Combien y a-t-il d'applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, 2\}$ (Démontrer le résultat!) ?
En déduire que $S(n, 2) = 2^n - 2$.
- 4) Démontrer que $S(p+1, p) = \frac{p}{2}(p+1)!$.
- 5) Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que le nombre d'applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ telles que $\text{Card}(f(\{1, \dots, n\})) = i$ est $\binom{p}{i} S(n, i)$.
- 6) En déduire que $\sum_{i=1}^p \binom{p}{i} S(n, i) = p^n$.

PRA1 - Probabilités

Exercice à rendre pour le jeudi 20 octobre 2022

Pour n et p entiers naturels non nuls, on note $S(n, p)$ le nombre d'applications surjectives de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, p\}$.

Dans tout l'exercice, n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

- 1) Montrer que si $n < p$ alors $S(n, p) = 0$. **On supposera désormais $n \geq p$.**
- 2) Démontrer que $S(n, n) = n!$ et que $S(n, 1) = 1$.
- 3) Combien y a-t-il d'applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, 2\}$ (Démontrer le résultat!) ?
En déduire que $S(n, 2) = 2^n - 2$.
- 4) Démontrer que $S(p+1, p) = \frac{p}{2}(p+1)!$.
- 5) Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que le nombre d'applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ telles que $\text{Card}(f(\{1, \dots, n\})) = i$ est $\binom{p}{i} S(n, i)$.
- 6) En déduire que $\sum_{i=1}^p \binom{p}{i} S(n, i) = p^n$.