Préparation au CAPES de Mathématiques

**Corrigé rapide du problème d'algèbre n°1**

## Partie 1 : Nombres parfaits

**1)** Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 et on a bien $1+2+3+6=12=2\times 6$. De même, les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28 et on a $1+2+4+7+14+28=56=2\times 28$.

**2)** Remarquons tout d'abord que si $Div(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs de l'entier naturel non nul $n$, l'application $Div(n)\longrightarrow Div(n)$, $d\longmapsto \dfrac{n}{d}$ est bijective. Soit alors $a\in\mathbb{N}$ parfait. Ce qui précède montre que $\sum_{d|a} d=\sum_{d|a}\dfrac{a}{d}=2a$ et donc $\sum_{d|a}\dfrac{1}{d}=2$.

**3)**
**a)** $p$ étant premier, les diviseurs de $p^k$ sont exactement $1, p, p^2, \cdots, p^k$ et donc $\sigma(p^k)=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

**b)** De même, les diviseurs de $p^kq^\ell$ sont les $p^\alpha q^\beta$ ($0\leq\alpha\leq k$ et $0\leq\beta\leq\ell$) et donc :

$$\sigma(p^kq^\ell)=\sum_{0\leq\alpha\leq k \text{ et } 0\leq\beta\leq\ell} p^\alpha q^\beta=\sum_{0\leq\alpha\leq k}\sum_{0\leq\beta\leq\ell} p^\alpha q^\beta=\sum_{0\leq\alpha\leq k} p^\alpha\sum_{0\leq\beta\leq\ell} q^\beta=\sigma(p^k)\sigma(q^\ell)$$

**c)** Supposons par l'absurde $a=p^kq^\ell$ parfait avec $p$ et $q$ impairs. Ce qui précède montre qu'on a alors $\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}.\dfrac{q^{\ell+1}-1}{q-1}=2a=2p^kq^\ell$ et donc $p^{k+1}q^{\ell+1}-p^{k+1}-q^{\ell+1}+1=2(pq-p-q+1)p^kq^\ell$. Par suite, $1-p^{k+1}-q^{\ell+1}=p^kq^\ell(pq-2p-2q+2)=p^kq^\ell((p-2)(q-2)-2)$. Or, $p$ et $q$ étant premiers distincts et impairs, le plus petit vaut au moins 3 et l'autre au moins 5 et donc $(p-2)(q-2)\geq 3$. L'égalité obtenue est donc impossible (le membre de gauche étant clairement négatif).

## Partie 2 : Nombres parfaits pairs

**1)** Si $n$ n'est pas premier, on peut écrire $n=pq$ avec $1<p<n$ et $2^n-1=(2^p)^q-1$ est divisible par $2^p-1$ avec $1<2^p-1<2^n-1$ donc $2^n-1$ n'est pas premier.

**2)**
**a)** C'est clair : la décomposition en facteurs premiers de $a$ ne peut contenir que les nombres premiers 2 et $2^n-1$.

**b)** La somme des diviseurs de $a$ est donc $\sigma(a)=\sum_{k=0}^{n-1}2^k(2^n-1+1)=2^n\dfrac{2^n-1}{2-1}=2a$ : $a$ est parfait.

**3)** Soit $a$ un entier pair parfait.

**a)** On peut alors écrire $a$ sous la forme $a = 2^{n-1}m$ avec $n \geq 2$ et $m$ impair. Les diviseurs de $2^{n-1}$ et ceux de $m$ étant premiers entre eux deux à deux, on a $\sigma(a) = \sigma(2^{n-1})\sigma(m)$. Or, $\sigma(2^{n-1}) = 2^n - 1$ et $\sigma(a) = 2a = 2^n m$ donc $2^n m = (2^n - 1)\sigma(m)$.

**b)** $2^n - 1$ divise alors $2^n m$ et est premier avec $2^n$ donc il divise $m$ et on peut écrire $m = M(2^n - 1)$ et $M$ est en particulier un diviseur de $m$. En reportant, il vient $\sigma(m) = 2^n M = m + M$. Comme $m$, $M$ et 1 sont des diviseurs de $m$ avec en outre $M < m$ (car $n \geq 2$), on a nécessairement $M = 1$ et par suite $m = 2^n - 1$ est premier (il n'a que deux diviseurs).

**4)** Soit $a$ un entier parfait pair. On peut donc écrire $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ avec $(2^n - 1)$ (donc $n$) premier. 6 étant exclu, on a $n > 2$. Pour $n = 3$, $a = 28 \equiv 1\ (9)$. Pour $n > 3$, $n$ ne peut pas être congru à 0, 2, 3 ou 4 modulo 6 (car $n$ est premier) et donc

- ou bien $n \equiv 1\ (6)$ et $n - 1$ est multiple de 6. Comme $2^6 \equiv 1\ (9)$, on a $2^{n-1} \equiv 1\ (9)$ et par suite, $a = 2^{n-1}(2 \times 2^{n-1} - 1) \equiv 1(2 - 1) = 1\ (9)$,

- ou bien $n \equiv 5\ (6)$. Comme $2^4 \equiv 7\ (9)$, on a $2^{n-1} \equiv 2^4(2^6)^k \equiv 7\ (9)$ et donc : $a = 2^{n-1}(2 \times 2^{n-1} - 1) \equiv 7(14 - 1) \equiv 1\ (9)$.