Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème d'algèbre n°1

A rendre pour le jeudi 6 novembre 2008

Partie 1 : Nombres parfaits

On appelle *nombre parfait* tout entier a strictement supérieur à 1 qui est égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est à dire tous sauf lui même), autrement dit a est parfait si la somme de ses diviseurs (positifs) vaut $2a$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ (somme de tous les diviseurs positifs de n).

1) Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

2) Montrer que la somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait vaut 2.

3) **a)** Soient p un nombre premier et k un entier positif. Vérifier que $\sigma(p^k) = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$.

b) Soient p et q deux nombres premiers distincts et $k, \ell \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma(p^k q^\ell) = \sigma(p^k)\sigma(q^\ell)$.

c) En déduire qu'un nombre parfait impair a nécessairement au moins trois facteurs premiers distincts.

Aucun nombre parfait impair n'est à ce jour connu. On suppose qu'il n'en existe aucun ...

Partie 2 : Nombres parfaits pairs

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n n'est pas premier, il en est de même de $2^n - 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $2^n - 1$ est premier et on pose $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

a) Montrer qu'un diviseur de a est nécessairement soit de la forme $2^k(2^n - 1)$ soit de la forme 2^k, k étant un entier compris entre 0 et $n - 1$.

b) En déduire que a est parfait.

3) Soit réciproquement a un entier naturel pair parfait.

a) Montrer que l'on peut l'écrire a sous la forme $a = 2^{n-1}m$ avec m impair et que $2^n m = (2^n - 1)\sigma(m)$.

b) En déduire que $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ et que $2^n - 1$ premier.

4) Montrer que si on fait la somme des chiffres d'un nombre parfait pair a, puis si on fait la somme des chiffres du nombre obtenu etc ... , on obtient toujours 1 sauf pour $a = 6$. On pourra remarquer que si $p > 3$ est un nombre premier, alors p est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$ et observer alors la congruence modulo 9.