Université de Rennes 1 **2007-2008**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé du devoir n°2 (algèbre)

Partie 1

1) Supposons que f et g sont métriquement équivalents. Soient $x, y \in E$. $\|f(x+y)\|^2 = \|g(x+y)\|^2$ c'est à dire $\|f(x)\|^2 + 2 < f(x), f(y) > + \|f(y)\|^2 = \|g(x)\|^2 + 2 < g(x), g(y) > + \|g(y)\|^2$ et donc, après simplification $< f(x), f(y) > = < g(x), g(y) >$. La réciproque est immédiate.

2) Soient f symétrique et g antisymétrique avec $f \circ g = g \circ f$.

a) Soit x dans E.
$$\begin{aligned} < f(x), g(x) > &= < x, f \circ g(x) > \quad \text{car } f = f^* \\ &= < x, g \circ f(x) > \\ &= - < x, g^* \circ f(x) > \quad \text{car } g^* = -g \\ &= - < g(x), f(x) > \end{aligned}$$
et donc $< f(x), g(x) > = 0$.

b) Soient $x, y \in E$.
$$\begin{aligned} \|(f+g)(x)\|^2 &= \|f(x)\|^2 + 2 < f(x), g(x) > + \|g(x)\|^2 \\ &= \|f(x)\|^2 - 2 < f(x), g(x) > + \|g(x)\|^2 \\ &= \|(f-g)(x)\|^2 \end{aligned}$$
Donc $f+g$ et $f-g$ sont métriquement équivalents.

3) Soit $y \in E$. Posons $x = g^{-1}(y)$. f et g sont métriquement équivalents donc $\|f(x)\| = \|g(x)\|$ c'est à dire $\|(f \circ g^{-1})(y)\| = \|y\|$. On a donc $f = u \circ g$ avec $u = f \circ g^{-1} \in O(E)$.

Partie 2

1) Le résultat est clair puisqu'un élément de $O(E)$ conserve la norme.

2) Soient f et g métriquement équivalents.

a) Si $x \in \text{Ker } f$ alors $\|g(x)\| = \|f(x)\| = \|0\| = 0$ donc $x \in \text{Ker } g$. L'inclusion réciproque se montre de même.

b) Soit E_1 un supplémentaire de Ker f. E_1 est alors isomorphe à Im f mais aussi à Im g (puisque E_1 est aussi un supplémentaire de Ker g). Considérons alors $f_1 : E_1 \longrightarrow \text{Im } f, x \longmapsto f(x)$ et $g_1 : E_1 \longrightarrow \text{Im } g, x \longmapsto g(x)$. Par construction f_1 et g_1 sont des isomorphismes. Posons donc $u_1 = f_1 \circ g_1^{-1}$. $u_1 : \text{Im } g \longrightarrow \text{Im } f$ est une isométrie (en effet, pour tout x de E on a : $\|u_1(x)\| = \|f_1[g_1^{-1}(x)]\| = \|g_1[g_1^{-1}(x)\|$ car f_1 et g_1 sont métriquement équivalents).
D'autre part, $(\text{Im } g)^\perp$ et $(\text{Im } f)^\perp$ sont de même dimension donc il existe une isométrie u_2 de $(\text{Im } g)^\perp$ dans $(\text{Im } f)^\perp$. Considérons alors u définie sur $E = \text{Im } g \oplus (\text{Im } g)^\perp$par $u(x_1 + x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Soit $x = x_1 + x_2 \in E$. x_1 et x_2 sont dans des sous-espaces orthogonaux donc (Pythagore) $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. De même $u_1(x_1)$et $u_2(x_2)$ sont dans des sous-espaces orthogonaux donc on a (Pythagore) $\|u(x)\|^2 = \|u_1(x_1)\|^2 + \|u_2(x_2)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ car u_1 et u_2 sont des isométries. Par suite, $u \in O(E)$. Or par construction, $f = u \circ g$.

3) Soient $f, g, h \in L(E)$.

- L'identité de E est un élément de $O(E)$ et $f = i \circ f$ donc $f \sim f$. La relation est réflexive.
- Supposons $f \sim g$. Alors : $\exists u \in O(E)$, $f = u \circ g$ et donc $g = u^{-1} \circ f$. Or $u^{-1} \in O(E)$ donc $g \sim f$ et la relation est symétrique.
- Supposons $f \sim g$ et $g \sim h$. $\exists u \in O(E)$, $f = u \circ g$ et $\exists v \in O(E)$, $g = v \circ h$. Doù $f = (u \circ v) \circ h$ et comme $u \circ v \in O(E)$, $f \sim h$. La relation est donc transitive.

Par suite $\sim$ est une relation d'équivalence.