Université de Rennes 1 **2007-2008**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème d'algèbre n°2

A rendre pour le jeudi 29 novembre 2007

Dans tout le problème, E désigne un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $<,>$.
Deux endomorphismes f et g de E sont dits *métriquement équivalents* si : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.
Soient f et g deux endomorphismes de E.

Partie 1

1) Montrer que f et g sont métriquement équivalents si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, < f(x), f(y) > = < g(x), g(y) >$$

2) On suppose f symétrique, g antisymétrique et $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que : $\forall x \in E$, $< f(x), g(x) > = 0$.

b) En déduire que $f + g$ et $f - g$ sont métriquement équivalents.

3) On suppose f métriquement équivalent à un isomorphisme g. Montrer que $f \circ g^{-1}$ est une isométrie et en déduire que : $\exists u \in O(E)$, $f = u \circ g$.

Partie 2

1) On suppose qu'il existe un élément u de $O(E)$ tel que $f = u \circ g$. Montrer que f et g sont métriquement équivalents.

2) On suppose à présent que f et g sont métriquement équivalents.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ g$.

b) En utilisant la décomposition $E = \mathrm{Im}\ g \oplus (\mathrm{Im}\ g)^{\perp}$ et le fait que deux sous-espaces de E de même dimension sont isométriques, en déduire qu'il existe un élément u de $O(E)$ tel que $f = u \circ g$.

3) Montrer que la relation $\sim$ définie dans $L(E)$ par

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists u \in O(E), \ f = u \circ g$$

est une relation d'équivalence.