

PRA1 - Analyse

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 10 novembre 2022

Remarque :

Pour tout réels k et k' tels que $k \leq k'$ on a : $\forall (x, y) \in I^2, k|x - y| \leq k'|x - y|$ et donc une fonction k -lipschitzienne sur I est également k' -lipschitzienne sur I . On peut donc imposer au réel k de la définition d'être strictement positif...

1) Soit f une fonction lipschitzienne sur I et k un réel tel que : $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $k|x - y| \xrightarrow{x \rightarrow y} 0$ on déduit $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$: f est continue en y .

On a bien montré que f est continue sur I .

2) Considérons donc des réels k et ℓ tels que $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq \ell|x - y|$. Soit $(x, y) \in I^2$.

$$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)| &= |f(x) - f(y) + \lambda(g(x) - g(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |\lambda| \cdot |g(x) - g(y)| \\ &\leq k|x - y| + \ell|\lambda||x - y| = (k + \ell|\lambda|)|x - y| \end{aligned}$$

$f + \lambda g$ est donc bien lipschitzienne.

3) On choisit par exemple $I = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x$ et $g = f$. f et g sont alors lipschitziennes (on peut prendre $k = 1$) mais fg ne l'est pas puisque s'il existait un réel k tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |(fg)(x) - (fg)(y)| \leq k|x - y|$ alors on aurait en particulier (choix de $y = x + 1$) $\forall x \in \mathbb{R}, |2x + 1| \leq k$ ce qui est clairement impossible.

4) f et g étant continues (d'après 1) sur le segment $[a, b]$, elles y sont bornées et on peut considérer des majorants M (respectivement N) de $|f|$ (resp. $|g|$) sur cet intervalle. Soit alors $(x, y) \in [a, b]^2$. En conservant les notations de la question 2), on a :

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)]| \\ &\leq M|g(x) - g(y)| + N|f(x) - f(y)| \\ &\leq M\ell|x - y| + Nk|x - y| = (M\ell + Nk)|x - y| \end{aligned}$$

fg est donc bien lipschitzienne sur $[a, b]$.

5) Soit f une fonction lipschitzienne sur I et k un réel tel que : $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Soit $y \in I$. Pour tout réel $x \neq y$ on a $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$. f étant supposée dérivable en y et la fonction valeur absolue étant continue, on peut passer à la limite quand x tend vers y et on obtient $|f'(y)| \leq k$. f' est donc bien bornée sur I .

6)

a) f est clairement dérivable sur \mathbb{R}^* et $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc f est également dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$). f est finalement dérivable sur \mathbb{R} .

b) On a $\forall x \neq 0, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et donc en particulier, pour tout entier naturel non nul $n, f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) = -2\sqrt{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. f' n'est donc pas bornée et par suite, d'après la question 5), f n'est pas lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Remarque : La composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* n'est en général pas une fonction dérivable sur \mathbb{R}^* ...