UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA1 - Analyse

Exercice à rendre pour le jeudi 10 novembre 2022

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est lipschitzienne sur I s'il existe un réel k tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

On note $\mathscr{L}(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I.

1) Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I.

2) Soit f et g deux fonctions appartenant à $\mathscr{L}(I)$ et λ un réel. Montrer que $f + \lambda g$ est aussi un élément de $\mathscr{L}(I)$.

3) Trouver un intervalle I et deux fonctions f et g telles que f et g soient toutes les deux lipschitziennes sur I mais $f.g$ n'est pas lipschitzienne sur I.

4) Soit a et b ($a < b$) deux nombres réels. Montrer que si f et g sont lipschitziennes sur $[a, b]$ alors $f.g$ est aussi lipschitzienne sur $[a, b]$.

5) Soit I un intervalle ouvert non vide. On suppose que f est lipschitzienne et dérivable sur I. Montrer que sa dérivée est bornée sur I.

6) Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

a) Cette fonction est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

b) f est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?