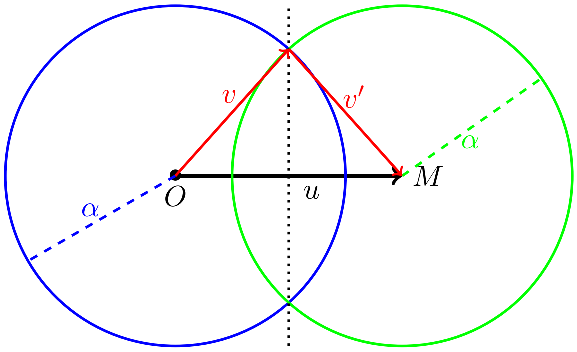
Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide du problème de géométrie n°2

1) Pour 2) $\Rightarrow$ 1), on a $\|u\| \leqslant \|v\| + \|v'\| = 2\alpha$.

1) $\Rightarrow$ 2) est clair si $u = 0$. Dans le cas contraire, fixons un point O de $\mathscr{P}$ et soit M l'unique point de $\mathscr{P}$ tel que $u = \overrightarrow{OM}$. Si N désigne un point d'intersection des deux cercles de rayon α et de centres respectifs O et M, on a $u = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$ avec $\left\|\overrightarrow{ON}\right\| = \left\|\overrightarrow{NM}\right\| = \alpha$.

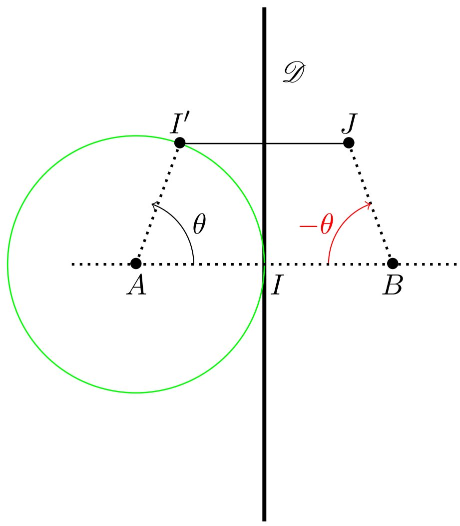


L'alternative consistait à introduire un vecteur normé j orthogonal à u et à poser $v = \frac{u}{2} + \sqrt{\alpha^2 - \frac{\|u\|^2}{4}}j$ et $v = \frac{u}{2} - \sqrt{\alpha^2 - \frac{\|u\|^2}{4}}j$

2) Soit $r \in \mathscr{R}_A$. Notons $B = s_{\mathscr{D}}(A)$ et I le milieu de $[AB]$. Supposons $r \neq id$ (dans le cas contraire, les deux transformations étudiées sont respectivement égales à l'identité et à $s_{\mathscr{D}}$) : $r = r(A, \theta)$.

— • On a $s_{\mathscr{D}} \circ r \circ s_{\mathscr{D}}^{-1}(B) = s_{\mathscr{D}} \circ r(A) = s_{\mathscr{D}}(A) = B$. L'isométrie paire $s_{\mathscr{D}} \circ r \circ s_{\mathscr{D}}^{-1}$ n'étant pas l'identité, on en déduit que c'est une rotation de centre B.

• Notons $I' = r(I)$ et $J = s_{\mathscr{D}}(I')$. $s_{\mathscr{D}} \circ r \circ s_{\mathscr{D}}^{-1}(I) = s_{\mathscr{D}} \circ r(I) = s_{\mathscr{D}}(I') = J$ or $(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}})$ d'où $s_{\mathscr{D}} \circ r \circ s_{\mathscr{D}}^{-1} = r(B, -\theta)$.



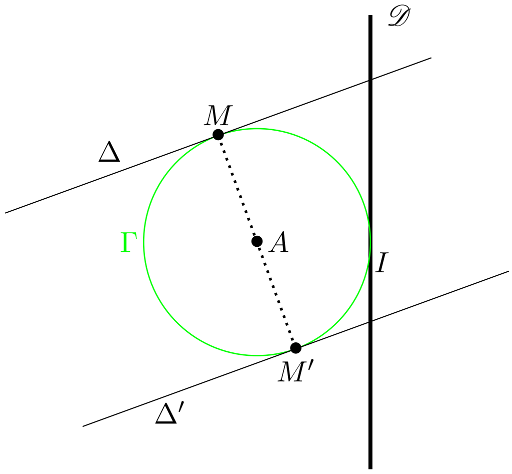
— • $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1}$ est une isométrie impaire,

• Tout point M de $r(\mathscr{D})$ s'écrit $M = r(P)$ avec $P \in \mathscr{D}$ donc $s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1}(M) = s_{\mathscr{D}}(P) = P$ et finalement $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1}(M) = r(P) = M$: tous les points de $\mathscr{D}$ sont invariants.

• En conclusion, $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1} = s_{r(\mathscr{D})}$

Solution alternative : Avec les mêmes notations, $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1}(I') = r(I) = I'$ donc l'isométrie impaire $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1}$ est une réflexion d'axe passant par I'. En notant $B' = r(B)$, $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1}(A) = r(B) = B'$ donc $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1} = s_{\Delta}$ où Δ est la médiatrice de $[AB']$ c'est à dire $r(\mathscr{D})$.

3) Soient M et M' deux points diamétralement opposés de Γ et Δ, Δ' les tangentes à Γ en M et M'. La rotation r (resp. r') qui fixe A et qui envoie I sur M (resp. I sur M') est telle que $r(\mathscr{D}) = \Delta$ (resp. $r'(\mathscr{D}) = \Delta'$) par conservation de l'orthogonalité ($\mathscr{D} \perp (AI)$ donc $r(\mathscr{D}) \perp (r(A)r(I))$).). On déduit alors de 2) que s_{Δ} et $s_{\Delta'}$ sont dans G et donc $t_{2\overrightarrow{MM'}} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ aussi.



4) Soit u un vecteur tel que $\|u\| \leqslant 8\rho$ alors, d'après 1), on peut écrire $u = v + v'$ avec les égalités $\|v\| = \|v'\| = 4\rho = \left\|2\overrightarrow{MM'}\right\|$. La question précédente a montré que toutes les translations de vecteur w où $\|w\| = \left\|2\overrightarrow{MM'}\right\|$ étaient dans G donc $t_u = t_v \circ t_{v'} \in G$.

5) On déduit de la question précédente que G, qui est stable par composition, contient toutes les translations. Comme il contient aussi toutes les réflexions d'axe passant par B, il contient toutes les réflexions et donc toutes les isométries.