UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Problème à rendre pour le 29 septembre 2020

Dans tout le problème, $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien, A un point de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$ ne passant pas par A.

On note d'une part $\mathscr{R}_A$ l'ensemble des rotations laissant A invariant, et d'autre part, pour toute droite $\mathscr{D}'$, $s_{\mathscr{D}'}$ la réflexion d'axe $\mathscr{D}'$.

Soit G le sous-groupe (du groupe des isométries) engendré par $\mathscr{R}_A \cup \{s_{\mathscr{D}}\}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que G est le groupe des isométries.

1) Soit $\alpha > 0$ un réel et u un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Démontrer que $\|u\| \leqslant 2\alpha$ si et seulement s'il existe deux vecteurs v et v' de norme α tels que $u = v + v'$.

On pourra s'aider d'un dessin.

2) On note $B = s_{\mathscr{D}}(A)$ et I le milieu de $[AB]$.

Soit r un élément de $\mathscr{R}_A$ distinct de l'identité : $r = r(A, \theta)$. Montrer que :

a) $s_{\mathscr{D}} \circ r \circ s_{\mathscr{D}}^{-1} = r(B, -\theta)$ b) $r \circ s_{\mathscr{D}} \circ r^{-1} = s_{r(\mathscr{D})}$

3) Soit ρ la distance de A à $\mathscr{D}$ et Γ le cercle de centre A de rayon ρ.

Déduire de 2) que si M et M' sont deux points diamétralement opposés de Γ la translation de vecteur $2\overrightarrow{MM'}$ appartient à G. *On pourra décomposer cette translation en produit de deux réflexions.*

4) Déduire de 1) que si u est un vecteur tel que $\|u\| \leqslant 8\rho$ la translation de vecteur u appartient à G.

5) Conclure.