Université de Rennes

GA1 - Géométrie

Corrigé de l'exercice à rendre pour le jeudi 16 novembre 2023

1) Les homothéties et les translations du plan $\mathscr{P}$ étant des bijections, il en est de même des homothéties-translations (comme composées de bijections). De même, toute homothétie (resp. translation) transforme une droite en une droite parallèle donc, par composition, il en est de même des homothéties-translations.

2) Soit $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ une bijection transformant toute droite de $\mathscr{P}$ en une droite parallèle.

a) f a au moins deux points fixes distincts O_1 et O_2. Soit alors $M \notin (O_1O_2)$. $f((MO_1))$ est une droite passant par O_1 et parallèle à (MO_1) donc $f((MO_1)) = (MO_1)$. De même $f((MO_2)) = (MO_2)$ et par suite $f(M) = M$. Enfin, si $N \in (O_1O_2)$, on fixe un point $M \notin (O_1O_2)$ et le point précédent montre que $f(M) = M$. On a alors alors $N \notin (MO_2)$ et on a donc de même $f(N) = N$ ce qui prouve que f est l'identité.

b) f admet exactement un point fixe O. Fixons un point $A \neq O$. Soit M tel que $M \notin (OA)$. Les droites passant par O sont toutes globalement invariantes donc O, M, $f(M)$ sont alignés, $(f(M)f(A))/\!\!/(MA)$ et O, A, $f(A)$ sont alignés. Le théorème de Thalès assure alors que $\overrightarrow{Of(M)} = k\overrightarrow{OM}$ où $k = \dfrac{\overline{Of(A)}}{\overline{OA}}$. Enfin, si $M \in (OA)$, on fixe un autre point $A' \notin (OA)$ et on applique le même raisonnement. Finalement, f est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\overline{Of(A)}}{\overline{OA}}$.
Alternative (plus dans l'esprit de l'énoncé) : f admet exactement un point fixe O. Fixons un point $A \neq O$. Les droites passant par O sont toutes globalement invariantes donc O, A et $f(A)$ sont alignés. On en déduit l'existence d'un réel $k \neq 0$ (car $f(A) \neq f(O) = O$) tel que $\overrightarrow{Of(A)} = k\overrightarrow{OA}$. Si h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$ alors $h \circ f$ fixe les deux points distincts O et A. Comme $h \circ f$ est une bijection (comme composée de bijections) transformant toute droite de $\mathscr{P}$ en une droite parallèle (comme composée de telles fonctions), la question précédente montre que $h \circ f = id$ et donc $f = h^{-1}$ est bien une homothétie.

c) f n'a pas de point fixe. Fixons un point O et considérons la translation t de vecteur $\overrightarrow{f(O)O}$.
$g = t \circ f$ est une bijection (comme composée de bijections) et transforme encore toute droite de $\mathscr{P}$ en une droite parallèle. Comme g a au moins O comme point fixe, g est, d'après ce qui précède, soit l'identité soit une homothétie. $f = t^{-1} \circ g$ est donc une homothétie-translation.

3) Les homothéties-translations du plan sont exactement les applications bijectives (ou encore les transformations) du plan transformant toute droite en une droite parallèle.