Université de Rennes

GA1 - Géométrie

Corrigé de l'exercice à rendre pour le vendredi 15 novembre 2024

1) $f(O)$ est le point de coordonnées $(2,0)$ et $f(A)$ est le point de coordonnées $(0,-3)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{f(O)f(A)}$ sont donc $(-2,-3)$.

2) Soit M_1 et M_2 deux points du plan dont on note (x_1,y_1) et (x_2,y_2) les coordonnées respectives. On a alors $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1)$ et $\overrightarrow{f(M_1)f(M_2)}(2-y_2-(2-y_1),-x_2+x_1)$. En particulier,

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=f(M_1)f(M_2).$$

f est donc bien une isométrie du plan.

3) Soit M de coordonnées (x,y). On a alors :

$$f(M)=M \iff \begin{cases} 2-y=x \\ y=-x. \end{cases} \iff \begin{cases} x+2=x \\ y=-x. \end{cases}$$

Par suite, $F=\emptyset$.

4) Soit M de coordonnées (x,y). $f(M)$ a alors pour coordonnées $(2-y,-x)$ et $f\circ f(M)=f[f(M)]$ a pour coordonnées $(2-(-x),-(2-y))$ c'est à dire

$$\begin{array}{rcl} f\circ f:\mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(x,y) & \longmapsto & M'(x+2,y-2) \end{array}$$

On a alors, pour tout point M de $\mathscr{P}$, $\overrightarrow{Mf\circ f(M)}=\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(2,-2)$.
$f\circ f$ est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

5) D'après 2) et 3), f est une isométrie sans point fixe donc est une translation ou une symétrie glissée. Si c'était une translation on aurait $\overrightarrow{f(O)f(A)}=\overrightarrow{OA}$ ce qui n'est pas (question 1). f est donc une symétrie glissée : $f=t_{\overrightarrow{v}}\circ s_D=s_D\circ t_{\overrightarrow{v}}$ avec $\overrightarrow{v}$ vecteur directeur de la droite D. Mais alors $f\circ f=t_{2\overrightarrow{v}}$ donc (question 4) $\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Enfin, en notant $B=t_{\overrightarrow{v}}(O)$, B est de coordonnées $(1,-1)$ et $f(O)=s_D(B)$. Par suite D est la médiatrice de $[f(O)B]$ c'est à dire la droite d'équation $x+y=1$.

6) h est telle que pour tout point M on a $\overrightarrow{Ah(M)}=-2\overrightarrow{AM}$ soit $\overrightarrow{Oh(M)}=-2\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{OA}$.

$$\begin{array}{rcl} h:\mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(x,y) & \longrightarrow & M'(-2x+9,-2y+6) \end{array}$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} h\circ f:\mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(x,y) & \longmapsto & M'(-2(2-y)+9,-2(-x)+6)=M'(2y+5,2x+6) \end{array}$$

En particulier $h\circ f(A)=h[f(A)]$ est le point de coordonnées $(9,12)$. Or $f\circ h(A)=f(A)$ est le point de coordonnées $(0,-3)$. On en déduit que $h\circ f\neq f\circ h$.