Université de Rennes

GA2 - Géométrie

Exercice à rendre pour le vendredi 25 avril 2025

Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On note ω le nombre complexe $\omega = 1 + i$ et Ω le point de $\mathscr{P}$ d'affixe ω.
Soit $f : \mathscr{P}\backslash\{\Omega\} \longrightarrow \mathscr{P}\backslash\{\Omega\}$ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = 1 + i + \frac{4}{\overline{z} - 1 + i}.$$

1) Montrer que f est une involution.

2) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est le cercle de centre Ω et de rayon 2.

3) Soit M un point de $\mathscr{P}\backslash\{\Omega\}$ et M' son image par f. Montrer que $M' \in [\Omega M)$ et que $\Omega M.\Omega M' = 4$.
Que dire de la réciproque ?

4) Montrer que toute droite passant par Ω a une équation complexe de la forme $a(z - \omega) + \bar{a}(\bar{z} - \bar{\omega}) = 0$ où $a \in \mathbb{C}^*$.
En déduire que si $\mathscr{D}$ est une droite passant par Ω alors $f(\mathscr{D}\backslash\{\Omega\}) = \mathscr{D}\backslash\{\Omega\}$.

5) Montrer que toute droite du plan ne passant pas par Ω a une équation complexe de la forme

$$a(z - \omega) + \bar{a}(\bar{z} - \bar{\omega}) = k \quad \text{où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } k \in \mathbb{R}^*.$$

En déduire que l'image par f d'une droite $\mathscr{D}$ ne passant par Ω est un cercle passant par Ω, privé de Ω.

6) Soit $\mathscr{C}$ le cercle du plan centré en O et de rayon $\sqrt{2}$. Déterminer l'image de $\mathscr{C}\backslash\{\Omega\}$ par f.