UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide de l'exercice à rendre pour le 24 septembre 2020

Exercice

1) On vérifie que $\mathscr{E}$ est une partie non vide (car contenant la fonction nulle) de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2, stable par addition et par multiplication par un scalaire.

2)
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le système $\begin{cases} y(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ y'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{cases}$
admet une solution unique $(c_1(x), c_2(x))$, car le déterminant de ce système est $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$. Les formules de Cramer

$$c_1 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y & y_2 \\ y' & y_2' \end{vmatrix} \qquad c_2 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}$$

montrent que c_1 et c_2 sont des fonctions continûment dérivables de x, puisque y, y_1 et y_2 sont au moins deux fois continûment dérivables et que la fonction au dénominateur (en l'occurrence W) ne s'annule pas.

b) Supposons maintenant que y soit solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. On va montrer que c_1 et c_2 sont des constantes. Quand on dérive les deux équations du système qui définit c_1 et c_2, on obtient

$$\begin{cases} y' &= c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2' \\ y'' &= c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' \end{cases}$$

En comparant la première équation avec la deuxième du système originel, on trouve $0 = c_1'y_1 + c_2'y_2$. Par ailleurs, en utilisant le fait que y, y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle, on obtient

$$y'' = \frac{-1}{a}(by' + cy) = \frac{-c_1}{a}(by_1' + cy_1) + \frac{-c_2}{a}(by_2' + cy_2) = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

En comparant avec la seconde équation du système obtenu par dérivation, on trouve $0 = c_1'y_1' + c_2'y_2'$. Donc, pout tout $x \in \mathbb{R}$, les réels $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$ sont solution du système sans second membre

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= 0 \end{cases}$$

Comme le déterminant de ce système est $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, il admet une unique solution qui est donc la solution nulle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c_1'(x) = c_2'(x) = 0$. On a montré que c_1 et c_2 sont des constantes.

c) On en déduit que toute solution de l'équation différentielle sans second membre s'écrit comme combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$ à coefficients réels des deux solutions fondamentales y_1 et y_2 : (y_1, y_2) est génératrice de $\mathscr{E}$. Ces solutions fondamentales sont de plus linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$, car sinon leur Wronskien serait constamment nul. Elles forment donc bien une base.

3) y est deux fois continûment dérivable et on a : $y' : x \mapsto re^{rx}$ et $y'' : x \mapsto r^2e^{rx}$. Par suite, y est solution de (E) si et seulement pour tout x on a $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ ce qui revient bien à $ar^2 + br + c = 0$.

a) $y_1 = e^{r_1x}$ et $y_2 = e^{r_2x}$ sont solutions de l'équation (E) d'après ce qui précède et on a de plus :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad W(y_1, y_2)(x) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$ (car $r_2 \neq r_1$). D'après 2)c), (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{E}$.

b) $y_1 : x \mapsto e^{sx}$ est dans $\mathscr{E}$ car s est racine de P. D'autre part, $y_2 : x \mapsto xe^{sx}$ est de classe C^2 et vérifie $y_2' : x \mapsto (1 + sx)e^{sx}$ et $y_2'' : x \mapsto (2s + s^2x)e^{sx}$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) = e^{sx}\left[(as^2 + bs + c)x + b + 2as\right] = 0 \text{ car } s = \frac{-b}{2a}$$

y_2 est donc aussi solution de (E). D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{sx} & xe^{sx} \\ se^{sx} & (sx+1)e^{sx} \end{vmatrix} = e^{2sx} \neq 0.$

D'après 2)c), (y_1, y_2) est finalement une base de $\mathscr{E}$.

c) $y_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 : x \mapsto e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont de classe C^2 et on a $y_1' : x \mapsto e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)$ et $y_1'' : x \mapsto e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x)$. Par suite,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad ay_1''(x)+by_1'(x)+cy_1(x) &= e^{\alpha x}\left[(a(\alpha^2-\beta^2)+b\alpha+c)\cos\beta x+(-2\alpha\beta-b\beta)\sin\alpha x\right]\\ &= e^{\alpha x}\left[\mathscr{R}e\left(a\overline{\lambda}^2+b\overline{\lambda}+c\right)\cos\beta x+\mathscr{I}m\left(a\overline{\lambda}^2+b\overline{\lambda}+c\right)\sin\alpha x\right]=0\end{aligned}$$

y_1 est donc solution de (E). On montre de même que y_2 est aussi solution de (E). D'autre part,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\qquad W(y_1,y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x\\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)\end{vmatrix}\\ &= \beta e^{2\alpha x}\neq 0 \text{ car, } \lambda \text{ n'étant pas réel, } \beta\neq 0\end{aligned}$$

D'après 2)c), (y_1, y_2) est finalement une base de $\mathscr{E}$.