Algèbre et Géométrie 1

Problème à rendre pour le 24 septembre 2020

On cherche à résoudre l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$
où a, b, c sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$. On veut trouver les fonctions y, deux fois continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient cette équation.

1) Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) forment un espace vectoriel réel que l'on notera $\mathscr{E}$.

2) Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) telles que l'application $W(y_1, y_2) : x \mapsto y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ ne s'annule pas. $W(y_1, y_2)$ est appelé le ***Wronskien*** des deux solutions y_1 et y_2 et on a

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

a) Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} y(x) & = & c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ y'(x) & = & c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{cases}$$

admet une solution unique $(c_1(x), c_2(x))$ et que c_1 et c_2 sont des fonctions continûment dérivables.

b) On suppose maintenant que y est solution de (E). Montrer que c_1 et c_2 sont des constantes.

c) En déduire que (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{E}$.

3) Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $y : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si r vérifie $ar^2 + br + c = 0$. Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ est appelé ***polynôme caractéristique*** de l'équation différentielle.

a) On suppose que le polynôme P a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 $(b^2 - 4ac > 0)$. Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ forment une base de $\mathscr{E}$.

b) On suppose que le polynôme caractéristique a une racine réelle double s $(b^2 - 4ac = 0)$. Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{sx}$ et $y_2 : x \mapsto xe^{sx}$ forment une base de $\mathscr{E}$.

c) On suppose que le polynôme caractéristique a deux racines complexes non réelles conjuguées distinctes $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ $(b^2 - 4ac < 0)$. Montrer que $y_1 : x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $y_2 : x \mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ forment une base de $\mathscr{E}$.