UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Corrigé rapide du problème à rendre pour le 24 novembre 2020

1) Dans le cas où $n = 2$, u est l'opérateur qui échange les deux colonnes de la matrice en entrée.

a) Si $A = (A_1 \;\; A_2)$ et $B = (B_1 \;\; B_2)$ sont deux éléments de $\mathscr{M}(2, \mathbb{C})$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :
- $\lambda A = (\lambda A_1 \;\; \lambda A_2)$ donc $u(\lambda A) = (\lambda A_2 \;\; \lambda A_1) = \lambda u(A)$.
- $A + B = (A_1 + B_1 \;\; A_2 + B_2)$ donc $u(A + B) = (A_2 + B_2 \;\; A_1 + B_1) = u(A) + u(B)$.

u est une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$: c'est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
Remarque : Dire que u est un endomorphisme ne signifie nullement que $u(\mathbb{E}) = \mathbb{E})$ mais seulement que u prend ses valeurs dans $\mathbb{E}$.

b) On a $u(K_1) = K_3$, $u(K_2) = K_4$, $u(K_3) = K_1$ et $u(K_4) = K_2$ donc $mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En particulier $\det(u) = 1 \neq 0$ et u est bijectif : c'est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

c) On remarque que le carré de cette matrice est égal à I_4 donc $u^2 = id_{\mathbb{E}}$. Le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1$ est donc annulateur de u et u est diagonalisable. Comme il est clair que $u \neq id$ et $u \neq -id$, u est la symétrie par rapport à E_1 (sous-espace propre associé à la valeur propre 1) dans la direction de E_{-1} (sous-espace propre associé à la valeur propre -1) : pour $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_{-1}$, on a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$.
De plus, $u(K_1 + K_3) = K_1 + K_3$ et $u(K_2 + K_4) = K_2 + K_4$ donc $\mathrm{Vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4) \subset E_1$ et $u(K_1 - K_3) = -(K_1 - K_3)$ et $u(K_2 - K_4) = -(K_2 - K_4)$ donc $\mathrm{Vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4) \subset E_{-1}$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont donc de dimension au moins 2. Or $E = E_1 \oplus E_{-1}$ donc finalement. $E_1 = \mathrm{Vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$ et $E_{-1} = \mathrm{Vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$. On peut enfin remarquer que, en munissant $\mathbb{E}$ de sa structure euclidienne habituelle, la base $\mathscr{B}$ est orthonormée et on a $E_1 \perp E_{-1}$. Finalement u est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1 = \mathrm{Vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$.

Remarques :
- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport Ã un hyperplan donc ici u n'est pas une réflexion.
- On pouvait remarquer plus vite que u était une isométrie puisque sa matrice dans B est orthogonale.
- Les résultats connus sur les isométries du plan ne s'appliquaient pas ici puisque E est de dimension 4...
- Le déterminant de la matrice d'une isométrie vaut ± 1 mais la réciproque est totalement fausse.

2) Si $n = 2$, $\det\ (u(A)) = -\det\ (A)$ (interversion des colonnes).
Si $n = 3$, $\det\ (u(A) = \det(A_2 + A_3, A_1 + A_3, A_1 + A_2)$. Le déterminant étant tri-linéaire alterné, on en déduit $\det(u(A)) = \det(A_2, A_3, A_1) + \det(A_3, A_1, A_2) = 2.\det(A)$.

3) On a $\det(u(A)) = \det(S - A_1, S - A_2, \cdots, S - A_n) = \det((n-1)S, S - A_2, \cdots, S - A_n)$ (en remplaçant la première colonne par la somme de toutes les colonnes). Donc
$\det(u(A)) = (n-1)\det(S, S - A_2, \cdots, S - A_n) = (n-1)\det(S, -A_2, \cdots, -A_n)$ donc

$$\det(u(A)) = (n-1)(-1)^{n-1}\det(S, A_2, \cdots, A_n) = (n-1)(-1)^{n-1}\det(A).$$

4)

a) Soit $C = AU_n$. On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}u_{k,j}$ avec $u_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } k \neq j \\ 0 \text{ si } k = j \end{cases}$ donc $c_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j} a_{i,k}$. On en déduit que $C_j = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j} A_k$ donc $AU_n = u(A)$.

b) On a $J_n^2 = nJ_n$ donc $U_n^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n$ (J_n et I_n commutent) soit $U_n^2 = (n-2)J_n + I_n$.
Par suite on a $U_n^2 = (n-2)(J_n - I_n) + (n-1)I_n = (n-2)U_n + (n-1)I_n$.
Soit alors $A \in \mathbb{E}$. On a $u^2(A) = u(AU_n) = AU_n^2$ soit

$$u^2(A) = A((n-2)U_n + (n-1)I_n) = (n-2)AU_n + (n-1)A$$

donc $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$ et $P = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de u. Le polynôme P est scindé à racines simples donc u est diagonalisable et $sp(u) \subset \{-1, n-1\}$

Question bonus :
Le sous-espace E_{-1} est l'ensemble des matrices A telles que, pour tout j, $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j} A_k = -A_j$, c'est-à-dire telles que $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = 0$ (il est donc de dimension $n^2 - n$: on peut choisir les $n-1$ premières colonnes et la dernière est alors fixée). Si une matrice A a toutes ses colonnes égales, alors $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n, k \neq j} A_k = (n-1)A_j$ donc $A \in E_{n-1}(u)$. Or l'ensemble des matrices ayant des colonnes identiques est de dimension n (on peut choisir la première colonne et en déduire les autres) donc, comme $\dim(E_{n-1}) = n^2 - \dim(E_1) = n$, $E_{n-1}(u)$ est finalement l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.