UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Problème à rendre pour le 24 novembre 2020

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\mathbb{E} = \mathscr{M}(n, \mathbb{C})$. Pour $A \in \mathbb{E}$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note A_j la j-ième colonne de A. Soit u l'application qui à toute matrice A de $\mathbb{E}$ associe la matrice B de $\mathbb{E}$ dont les colonnes sont :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad B_j = S - A_j \quad \text{où} \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

1) Dans cette question seulement $n = 2$ et $\mathbb{E}$ est muni de la base $\mathscr{B} = (K_1, K_2, K_3, K_4)$ où

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

b) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que u est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

c) Donner la nature géométrique de l'automorphisme u en précisant ses éléments caractéristiques.
On pourra remarquer que $u^2 = id$.

2) Exprimer $\det\big(u(A)\big)$ en fonction de $\det(A)$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

3) À l'aide des propriétés du déterminant, montrer que l'on a

$$\det\big(u(A)\big) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A)$$

4) Dans le cas général, on admet que u est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
Soit J_n la matrice de $\mathbb{E}$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $U_n = J_n - I_n$.

a) Exprimer le produit AU_n à l'aide de u et de A.

b) En déduire un polynôme annulateur de degré 2 de u. *On pourra chercher à expliciter u^2.*
u est-il diagonalisable ?
Question bonus : Expliciter les sous-espaces propres de u.