Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème d'algèbre n°3

Partie 1 : Endomorphismes adjoints

Soit $y \in Im\, v$ (on peut donc l'écrire $y = v(x)$ pour un certain x de E). Soit $x' \in Ker\, u$. On a alors, $f(y, x') = f(v(x), x') = f(x, u(x'))$ (par définition de l'adjoint) et donc $f(y, x') = f(x, 0)$ (car $x' \in \text{Ker } u$) soit $f(y, x') = 0$. On a donc montré : $\forall y \in \text{Im } v$, $y \in (\text{Ker } u)^{\perp}$ soit $\text{Im } v \subseteq (\text{Ker } v)^{\perp}$.

Partie 2 : Adjoint en dimension infinie

Il est clair que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.

1) h est continue et positive sur [0,1] et de plus h n'est pas identiquement nulle donc $\int_0^1 h(t)dt > 0$. On rappelle l'idée de la démonstration de ce résultat classique : si h n'était pas identiquement nulle, on trouverait par continuité un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ sur lequel h serait minorée par un certain $\varepsilon > 0$ et la relation de Chasles sur les intégrales conduirait à une contradiction (l'intégrale d'une fonction positive étant positive).

En particulier, pour $\varphi \neq 0$ dans E, φ^2 est dans E et donc $f(\varphi, \varphi) > 0$. Par suite, f est définie positive : f est un produit scalaire.

2)

a) Il est clair que $H \neq E$. Soit $\varphi \in H^{\perp}$. Posons $\psi(t) = t\varphi(t)$. ψ est dans H donc $f(\varphi, \psi) = 0$. C'est à dire $\displaystyle\int_0^1 t\varphi^2(t)dt = 0$. 1) permet alors de déduire que $\forall t \in [0, 1]$, $t\varphi^2(t) = 0$. φ est donc nulle sur $]0, 1]$ et donc sur $[0, 1]$ par continuité. On a bien montré $H^{\perp} = \{0\}$.

b) On en déduit $(H^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$ et donc $(H^{\perp})^{\perp} \neq H$. Par suite E ne peut être de dimension finie.

3)

a) Le noyau de u est clairement H.

b) Si u admettait un adjoint v, on aurait, d'après la première partie, $\text{Im}\, v \subseteq (\text{Ker } u)^{\perp}$, c'est à dire d'après 2a) $\text{Im}\, v = \{0\}$. Cela entraînerait alors $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall y \in E$, $< u(x), y >= 0$ et donc :

$\forall x \in E$, $u(x) = 0$. C'est absurde car $u \neq 0$.