Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème d'algèbre n°3

A rendre pour le jeudi 22 octobre 2009

Partie 1 : Endomorphismes adjoints

Soient E un espace vectoriel sur un corps K et f une forme bilinéaire symétrique sur E.

Pour toute partie X de E, on note $X^{\perp}$ l'orthogonal de X dans E pour f :

$$X^{\perp} = \{y \in E, \forall x \in X, f(x,y) = 0\}$$

Soient u et v deux endomorphismes de E, adjoints relativement à f c'est à dire tels que :

$$\forall x, y \in E,\ f(u(x), y) = f(x, v(y))$$

Montrer que $\mathrm{Im}\ v \subseteq (\mathrm{Ker}\ u)^{\perp}$.

Partie 2 : Adjoint en dimension infinie

Dans tout ce qui suit, $K = \mathbb{R}$, E est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $I = [0, 1]$, à valeurs réelles, et f est la forme définie pour $\varphi, \psi \in E$ par : $f(\varphi, \psi) = (\varphi|\psi) = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt$.

1) Soit $h \in E$. On suppose que $h(t) \geq 0$ pour tout t de I et que h n'est pas identiquement nulle. Montrer que : $\int_0^1 h(t)dt > 0$. Qu'en déduit-on pour f ?

2) Soit $H \subseteq E$ le sous espace de E formé des φ telles que $\varphi(0) = 0$.

a) Montrer que $H \neq E$ et que $H^{\perp} = \{0\}$ (si $\varphi \in H^{\perp}$, on pourra poser $\psi(t) = t\varphi(t)$ et appliquer 1).

b) Calculer $\left(H^{\perp}\right)^{\perp}$. En déduire que E est de dimension infinie.

3) Soit u l'endomorphisme de E qui à tout φ de E associe la fonction constante de valeur $\varphi(0)$.

a) Quel est le noyau de u ?

b) Déduire des questions précédentes que u n'a pas d'adjoint.