Université de Rennes

AP1 - Analyse et Probabilités

Correction rapide du contrôle du 20 décembre 2024

Exercice n°1 (*4 points*)

1) On a $0 = f(0)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(2n-1) = \dfrac{2n-1+1}{2} = n$ (car $2n-1$ est impair).
On a montré : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad f(m) = n$ et f est donc surjective.

2) f n'est pas injective (car $f(2) = f(15)$) donc f n'est pas bijective.

Exercice n°2 (*9 points*)

1) Un résultat de cette expérience aléatoire est une main c'est-à-dire une partie à 5 éléments (une 5-combinaison) de l'ensemble C des 52 cartes. On munit l'ensemble Ω des mains de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ car le tirage a lieu au hasard. On remarque que Ω est de cardinal $\binom{52}{5}$ (soit $2\,598\,960$).

2) Une main comportant exactement un as peut être vue comme un couple formé d'un as et d'une partie à quatre éléments de l'ensemble des cartes qui ne sont pas des as. En notant $A = \{AP, AC, AK, AT\}$ l'ensemble des as, l'ensemble des telles mains est alors (avec les notations usuelles) $A \times \mathscr{C}_4(C \backslash A)$. Il y a donc $\mathrm{Card}(A).\mathrm{Card}(\mathscr{C}_4(C \backslash A)) = 4 \times \binom{48}{4}$ (soit $778\,320$ telles mains).

3) *<u>Remarque :</u> Il peut être tentant de proposer une solution de la forme : « On choisit un valet parmi les 4 puis quatre autres cartes (parmi les 51 qui restent). Il y a donc $\binom{4}{1} \times \binom{51}{4} = 999\,600$ telles mains.*
La formalisation insuffisante de cette réponse (qui est fausse !) cache une erreur classique : on compte plusieurs fois certaines mains...
Il est ici beaucoup plus facile de passer par le complémentaire. Si on note $\mathscr{V}$ l'évènement « On obtient une main comprenant au moins un valet », $\overline{\mathscr{V}}$ est l'ensemble des mains qui ne contiennent aucun valet donc l'ensemble des 5-combinaisons de l'ensemble des 48 cartes qui ne sont pas des valets.
On a donc $\mathbb{P}(\mathscr{V}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\mathscr{V}}) = 1 - \dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$.

Exercice n°3 (*8 points*)

1) D'après le texte, on sait que $P_M(T) = 0,98$; $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$; $P(M) = p$ donc $P(\overline{M}) = 1 - p$.

D'après la formule des probabilités totales, M et $\overline{M}$ formant un système complets d'évènements,

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = p \times 0,98 + (1-p) \times 0,01 \\ &= 0,97p + 0,01. \end{aligned}$$

2) La probabilité de M sachant T est : $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,98p}{0,97p + 0,01} = \dfrac{98p}{97p+1}$.

Le test est donc fiable si $P_T(M) \geqslant 0,95$; on donc résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} \frac{98p}{97p+1} \geqslant 0,95 &\iff \frac{98p}{97p+1} - \frac{95}{100} \geqslant 0 \iff \frac{98p \times 100 - 95 \times (97p+1)}{97p+1} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{9800p - 9215p - 95}{97p+1} \geqslant 0 \iff \frac{585p - 95}{97p+1} \geqslant 0 \iff 585p - 95 \geqslant 0 \\ &\iff p \geqslant \frac{95}{585} \iff p \geqslant \frac{5 \times 19}{5 \times 117} \iff p \geqslant \frac{19}{117} \end{aligned}$$

Le test est donc fiable si la proportion p de malades est supérieure ou égale à $\dfrac{19}{117}$.