

Exercice n°1

- 1) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue et ne s'annule pas sur $] -1; +\infty[\setminus\{0\}$ donc (théorème du quotient) $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est continue sur $] -1; +\infty[\setminus\{0\}$. On en déduit que f est continue sur $] -1; +\infty[\setminus\{0\}$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 + 1 = f(0)$ et f est finalement continue sur $] -1; +\infty[$.
- 2) Soit $x \in] -1; +\infty[\setminus\{0\}$. $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} - 1 \right) = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$. Or $x \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$: f est dérivable en 0 (et on a $f'(0) = \frac{1}{2}$).
- 3) On a $1+x \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} 0^+$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} 1$ et on peut donc prolonger f par continuité sur $[-1; +\infty[$ en posant $f(-1) = 1$.

Exercice n°2

- 1) VRAI. Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n + \exp(-u_n) \geq u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Si cette suite était majorée alors elle convergerait vers un réel ℓ vérifiant l'équation $\ell = \ell + \exp(-\ell)$ (car $x \mapsto x + \exp(-x)$ est continue sur \mathbb{R}) ce qui est absurde puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et non majorée : elle diverge vers $+\infty$.

- 2) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{2x^2}$$

La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$: c'est une bijection de $[\sqrt{3}, +\infty[$ dans $f([\sqrt{3}, +\infty[) = [\sqrt{3}, +\infty[$.

- a) Puisque $a_0 \in [\sqrt{3}, +\infty[$ (intervalle stable), la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n l'assertion « $\sqrt{3} \leq a_n \leq 2$ ».

- (initialisation) \mathcal{P}_0 est vraie puisque $a_0 = 2$.
- (hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose \mathcal{P}_n vraie et on montre qu'alors \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence $\sqrt{3} \leq a_n \leq 2$ et donc $f(\sqrt{3}) \leq f(a_n) \leq f(2)$ (car f est croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$) soit $\sqrt{3} \leq a_{n+1} \leq \frac{7}{4} \leq 2$. On a bien montré \mathcal{P}_{n+1} .

- (conclusion) Par le théorème de récurrence, on a finalement montré que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{3} \leq a_n \leq 2$.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} - 2\sqrt{3} \right) = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{3}a_n + 3}{2a_n}$ soit $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n}$.

D'après la question précédente $|2a_n| = 2a_n \geq 2\sqrt{3}$ et on a donc $|a_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (a_n - \sqrt{3})^2$.

Cela montre le caractère quadratique de la convergence de la suite (a_n) .

- c) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n l'assertion « $|a_n - \sqrt{3}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{2^n} |a_0 - \sqrt{3}|^{2^n}$ ».

- (initialisation) \mathcal{P}_0 est clairement vraie (il y a même égalité).

- (hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose \mathcal{P}_n vraie et on montre qu'alors \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

D'après la question précédente $|a_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (a_n - \sqrt{3})^2$ et donc, par hypothèse de récurrence,

$$|a_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{2^n} |a_0 - \sqrt{3}|^{2^n} \right\}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{2^{n+1}-1} |a_0 - \sqrt{3}|^{2^{n+1}} : \text{c'est } \mathcal{P}_{n+1}.$$

- (conclusion) Par le théorème de récurrence, on a finalement montré le résultat annoncé.