Université de Rennes

PRA2 - Analyse 2

Contrôle continu du lundi 27 avril 2026

Durée : 1 heure

Ce sujet est composé de deux exercices totalement indépendants.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices sont interdites comme, bien sûr, tous les objets connectés.

Exercice n°1

On considère la fonction réelle de la variable réelle f définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Démontrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.

2) f est-elle dérivable en 0 ?

3) **(Question subsidiaire)** Peut-on prolonger f par continuité sur $[-1;+\infty[$?

Exercice n°2 Les deux questions sont totalement indépendantes

1) Vrai ou Faux ? (Justifier la réponse) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \exp(-u_n)$. *Affirmation : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

2) Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$.

a) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{3} \leqslant a_n \leqslant 2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $a_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n}$.

En déduire que : $\left|a_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(a_n - \sqrt{3})^2$. Commenter.

c) **(Question subsidiaire)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|a_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{2^n - 1} \left|a_0 - \sqrt{3}\right|^{2^n}$.

Fin du sujet.