

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices d'analyse n°3

Intégrales et primitives

Révisions

- 1) Qu'appelle-t-on primitive d'une fonction f sur un intervalle I ?
- 2) Donner un exemple de fonction définie sur \mathbb{R} , non continue mais possédant une primitive sur \mathbb{R} .
- 3) Donner un exemple de fonction définie sur \mathbb{R} ne possédant pas de primitive sur \mathbb{R} .
- 4) Rappeler le lien entre intégrale et primitive. Illustrer graphiquement.
- 5) Rappeler les principales propriétés de l'intégrale.

Exercice n°1 Vrai ou Faux ? (CAPES 2026 - Première composition)

Assertion : Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^{n\pi} \sin^2(x) dx = \frac{n\pi}{2}$.

Exercice n°2 Vrai ou Faux ? (Mayotte 2024 - Deuxième composition)

On considère l'intégrale $I = \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx$. PROPOSITION : On a $I = \frac{e^\pi - 1}{5}$.

Exercice n°3 Vrai ou Faux ? (CAPES 2025 - Première composition)

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie sur \mathbb{N}^* par $I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$.

Proposition : Pour tout entier naturel n non nul, on a $I_{n+1} = \frac{1}{2} (e^2 + (n+1)I_n)$.

Exercice n°4 Vrai ou Faux ? (Mayotte 2022 - Deuxième composition)

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donnée pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.

PROPOSITION : pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice n°5

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

On pose $\alpha_n = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$. Montrer que $|\alpha_n| \leq \frac{k}{2n}$.

Exercice n°6 (CAPES 2013 - Première composition)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \implies \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

Exercice n°7 Vrai ou Faux ? (CAPES 2023 - Première composition)

1) Soient deux fonctions f et g définies et continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

Si $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$, alors pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) > g(x)$.

2) Si la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle est nulle, alors la fonction est nulle.

Exercice n°8 Vrai ou Faux? (CAPES 2025 - Première composition)

1) Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \int_0^x e^{-t} dt$.

Proposition : La fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$.

2) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie sur \mathbb{N}^* par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

Proposition : La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Exercice n°9 Vrai ou Faux? (CAPES 2024 - Première composition)

1) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Proposition : On a $\frac{1}{e} \leq F(1) \leq 1 - \frac{1}{e}$.

2) On note pour tout réel $t \geq 1$, $A(t) = \int_1^t x^2 \ln x dx$. **Proposition :** On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A(t)}{t^2} = +\infty$.

Exercice n°10

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \geq (b-a)^2$.

Exercice n°11 (CAPES 2009 - Première composition; CAPES 2014 - Deuxième composition)

Pour tout entier naturel n , on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

2) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

3) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice n°12 (CAPES 2009 - Oral 2)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

1) Donner le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

2) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

a) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leq t + 2$.

b) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (4 - (x+3)e^{1-x})$.

c) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice n°13 (Mayotte 2024 - Première composition)

Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ où f est la fonction de la variable réelle x définie

sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$. **On ne cherchera pas à calculer F .**

1. Justifier que F est une fonction croissante.

2. a. Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, on a : $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$.

b. En déduire que, pour tout réel x de $[0; +\infty[$, on a $F(x) \leq \int_0^x e^{-t} \left(t + \frac{1}{4}\right) dt$.

c. Calculer l'intégrale $\int_0^x e^{-t} \left(t + \frac{1}{4}\right) dt$ et en déduire que la fonction F est majorée par $\frac{5}{4}$.

d. Interpréter graphiquement ce résultat.