

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices d'analyse n°2

Étude des suites récurrentes - Théorème du point fixe

Révisions

- Énoncer le théorème du point fixe et son application à l'étude des suites récurrentes.
 Traiter l'exemple de la suite (u_n) définie par $u_0 = a \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$.
 Peut-on faire de même pour étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$?
- Rappeler les méthodes d'étude d'une suite récurrente à valeurs dans \mathbb{R} définie par la donnée de u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, en fonction de la monotonie de la fonction f . Illustrer graphiquement.

Exercice n°1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ telle que, pour tout $x : |f'(x)| \leq k$.

- 1) Montrer que l'application $g : x \mapsto f(x) - x$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- 2) En déduire que f a un unique point fixe.
- 3) Vérifier que $h : x \mapsto 1 + \ln(\cosh x)$ vérifie $|h'(x)| < 1$ sur \mathbb{R} mais que h n'a pas de point fixe.

Exercice n°2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$. On définit une suite récurrente par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$.
- 2) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que dire de la limite l ?
- 3) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - l| \leq 10^{-5}$.

Exercice n°3

Vrai ou Faux (*Mayotte 2022 - Deuxième composition*)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Affirmation : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice n°4

Vrai ou Faux ? (*CAPES 2025 - Première composition*)

Soit f une fonction définie et strictement décroissante sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}

Soit u_0 un réel et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de premier terme u_0 et telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Affirmation : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice n°5

(*CAPES 2008 - Oral 2*)

1) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

- a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geq x$.
- 2) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°6 (Mayotte 2021 - Deuxième composition)

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.
- 2) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq a_{n+1} < a_n \leq \frac{3}{2}$.
- 3) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{2})$.
- 4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$. Donner alors la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 5) (**Question subsidiaire**) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| a_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (a_n - \sqrt{2})^2$. Commenter.

Exercice n°7 (Mayotte 2024 - Première composition)

- f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
- g est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
- (u_n) est la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
- (v_n) est la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$
- $I = [1; 2]$ et φ est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1. a. Démontrer que $f(I) \subset I$ et que $g(I) \subset I$.
b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire que cette suite est convergente et déterminer sa limite.
3. a. Vérifier que, pour $x \in [1; 2]$, $g(x) - g(\varphi) = -\frac{1}{x\varphi}(x - \varphi)$.
b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ v_n et v_{n+1} sont de part et d'autre du nombre φ .
c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi} |v_n - \varphi|$
puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \varphi| \leq \left(\frac{1}{\varphi} \right)^n |1 - \varphi|$.
d. En déduire la limite de la suite (v_n) .

Exercice n°8 (Mayotte 2023 - Deuxième composition)

On considère :

- la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$;
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$;
- la suite (S_n) définie, pour tout entier naturel n , par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- 1) Étudier les variations de la fonction f ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = x$.
- 3) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ puis démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- 4) Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 5) Montrer que la suite (S_n) est monotone puis démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e^{-S_n}$.
- 6) Déterminer la limite de la suite (S_n) .