

## Analyse et Probabilités 2

### Feuille d'exercices d'analyse n°1

#### Fonctions dérivables - Accroissements finis

#### Révisions n°1

- Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles en un point  $a$  de  $\mathbb{R}$ .  
Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.  
Donner une autre définition, équivalente à la première. Interpréter graphiquement.
- Rappeler la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre  $n$  d'un produit de fonctions. Démontrer cette formule en utilisant un raisonnement par récurrence.
- Rappeler ce qu'est une fonction de classe  $C^k$  sur un intervalle. Donner un exemple de fonction dérivable sur un intervalle mais qui n'est pas de classe  $C^1$ .

#### Exercice n°1

*(Mayotte 2025 - Deuxième composition)*

On définit deux fonctions  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + 3x - 1$  et  $g(x) = 3x - \cos x + x^2 \sin x$ .

**Proposition :** Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  ont la même tangente au point d'abscisse 0.

#### Exercice n°2

*(Mayotte 2021 - Deuxième composition)*

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln \left( \frac{x+5}{x} \right)$  pour  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

**Proposition :** la fonction  $f$  est dérivable en 0.

2) Soit  $f$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . **Proposition :** si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire.

#### Exercice n°3

*(Capes 2023 - Première composition)*

Soit un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , non vide et non réduit à un point, une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et un élément  $a$  de  $I$ . Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel que  $f(I) \subset J$  et une fonction  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Démontrer que si  $f$  est dérivable en  $a$  et si  $g$  est dérivable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$ . Expliciter  $(g \circ f)'(a)$ .

#### Exercice n°4

(\*)

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui ne s'annule pas sur  $]a, b[$ . Montrer que si la fonction carrée  $f^2$  est dérivable, il en est de même de  $f$ .

#### Exercice n°5

*(CAPES 2021 - Première composition)*

On considère la fonction réelle de la variable réelle  $f$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  par  $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

- 1) Démontrer que,  $f$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .
- 2) Démontrer que  $f$  est dérivable en 0.
- 3) Démontrer que,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

#### Exercice n°6

(\*) *(CAPES 2011 - Première composition)*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  d'intérieur non vide et soit  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$ . On suppose  $f'(a) < f'(b)$  et on considère  $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$ . Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  $g(x) = f(x) - \lambda x$ .

- 1) Justifier l'existence d'un  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$  et montrer que  $c \notin \{a, b\}$ .
- 2) En déduire que  $f'$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
- 3) Donner alors un exemple de fonction définie sur  $\mathbb{R}$  ne possédant pas de primitive sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n°7**

Soit  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(0) = f'(0) = 0$ .

$$\text{On pose } g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que  $g$  est de classe  $C^1$  sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- 2) Vérifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  puis calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g'(x)$ .
- 3) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $f''(0)$ , pour que  $g$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Révisions n°2**

- Énoncer le théorème de Rolle (*CAPES 2016 - première composition*). En proposer une démonstration. Donner des exemples simples montrant l'importance des hypothèses de ce théorème.
- (*CAPES 2016 - première composition*)  
On suppose que  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est  $n$  fois dérivable sur  $[a, b]$  et s'annule en au moins  $n + 1$  points distincts de  $[a, b]$ . Montrer que la fonction dérivée  $n$ -ième  $g^{(n)}$  s'annule en au moins un point de  $[a, b]$ .
- Rappeler le théorème des accroissements finis. En donner une démonstration. Appliquer ce théorème à une fonction trinôme du second degré. Quelle propriété géométrique en déduit-on ?
- Énoncer et démontrer le résultat liant les variations d'une fonction au signe de sa dérivée.

**Exercice n°8**

VRAI ou FAUX (*Mayotte 2021 - Deuxième composition*)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $]a ; b[$  et soit  $x_0 \in ]a ; b[$  tel que  $f'(x_0) = 0$ .

**Proposition :** la fonction  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

**Exercice n°9**

Pour tout réel  $\lambda$ ,  $-1 \leq \lambda \leq 1$ , on considère la fonction  $f_\lambda$  donnée par  $f_\lambda(x) = \ln(x^2 - 2\lambda x + 1)$ . Soit  $C_\lambda$  la courbe représentative de  $f_\lambda$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- 1) Déterminer (en fonction de  $\lambda$ ) l'ensemble de définition de  $f_\lambda$  et montrer que la droite d'équation  $x = \lambda$  est un axe de symétrie pour  $C_\lambda$ . Par quelle transformation géométrique peut-on déduire  $C_{-\lambda}$  de  $C_\lambda$  ?
- 2) Etudier, en discutant suivant les valeurs de  $\lambda$ , la fonction  $f_\lambda$ . On précisera les variations, les limites aux bornes de l'ensemble d'étude et les branches infinies éventuelles.
- 3) Soit  $M_0$  un point du plan de coordonnées  $(x_0, y_0)$ . Combien de courbes  $C_\lambda$  passent par  $M_0$  ?

**Exercice n°10**

On définit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  par  $f(x) = x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) À l'aide de la définition de la dérivée, montrer que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = +1$ .
- 3) Peut-on en déduire que  $f$  est croissante près de 0 ?
- 4) Montrer que sur tout intervalle  $[-\alpha, \alpha]$  il existe au moins un point où  $f'$  vaut 1 et au moins un point où  $f'$  vaut  $-1$ . Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de  $f$  au voisinage de 0 ?

**Exercice n°11**

- 1) Soit  $a > 0$ . À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à  $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ , montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\frac{1}{n^{1+a}} < \frac{1}{a} \left( \frac{1}{(n-1)^a} - \frac{1}{n^a} \right)$ .

- 2) En déduire que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  donnée par  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 1$ .