UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices de probabilités n°3

Probabilités conditionnelles - Indépendance

Révisions n°1

- A étant un évènement de probabilité non nulle et B un évènement, rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de B sachant A (noté $\mathbb{P}_A(B)$) *(CAPES 2016 - deuxième épreuve)*. Montrer que l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
- *(CAPES 2016 - deuxième épreuve)* Soit i un entier strictement positif et soit $B_1, ..., B_i$ des évènements tels que $\mathbb{P}(B_1 \cap ... \cap B_{i-1}) > 0$. Après avoir justifié l'existence des probabilités conditionnelles $P_{B_1}(B_2), \cdots, P_{B1\cap...\cap B_{i-1}}(B_i)$, montrer que $P(B_1 \cap ... \cap B_i) = P(B_1)\, P_{B_1}(B_2) \cdots P_{B_1\cap...\cap B_{i-1}}(B_i)$.
- Qu'est-ce qu'un système complet d'évènements ? Donner un exemple simple. Rappeler et démontrer la formule des probabilités totales.
- Énoncer et démontrer la formule de Bayes (probabilité des causes).
- Donner les définitions de deux évènements indépendants, de n évènements mutuellement indépendants.

Exercice n°1 *(Oral 2 - CAPES 2006)*

On considère un carré $ABCD$ et son centre O. On note $\Gamma = \{A, B, C, D, O\}$.
Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de Γ à un autre. La seule contrainte est que, si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. À chaque saut, tous les déplacements sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ, c'est-à-dire avant son premier saut, la puce se trouve au point O.
Pour tout entier naturel n, on note O_n l'évènement « la puce se trouve au point O à l'issue de son $n^{ième}$ saut ». On note $p_n = \mathbb{P}(O_n)$; on a donc $p_0 = 1$.
On définit de même les évènements A_n, B_n, C_n, D_n.

1) Calculer p_1 et p_2.

2) Pour tout entier naturel n, démontrer les égalités : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$

3) **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$.

b) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (p_n).

4) **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b) Calculer la limite de la suite (p_n). Cela valide-t-il la conjecture émise en 3)b) ?

Exercice n°2 *(Oral 2 - CAPES 2005)*

Une usine produit des objets dont un pour cent est défectueux. On teste ces objets en bout de chaîne.
- Si un objet est défectueux, la probabilité que le test le décèle est égale à 0,9.
- Si un objet n'est pas défectueux, la probabilité que le test le trouve défectueux est égale à 0,05.

On teste un objet pris au hasard.

1) Le test donne cet objet comme défectueux, quelle est la probabilité qu'il le soit réellement ?

2) Les évènements « l'objet pris au hasard est défectueux » et « l'objet pris au hasard est donné défectueux par le test » sont-ils indépendants ?

Exercice n°3 *(CAPES 2014ex - première composition)*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On dispose de N urnes $U_1, \cdots, U_N$ contenant des boules rouges et des boules blanches et telles que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la proportion de boules rouges dans U_j est $\dfrac{j}{N}$.
On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. Pour tout entier naturel k, on note $p_N(k)$ la probabilité que le nombre de boules rouges obtenues soit égal à k. Démontrer que : $p_N(k) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\binom{n}{k}\left(\frac{j}{N}\right)^k\left(1-\frac{j}{N}\right)^{n-k}$.

Exercice n°4
On cherche un objet dans un meuble constitué de cinq tiroirs.
Si cet objet est bien dans ce meuble, il a autant de chance d'être dans chacun des tiroirs.
La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p (où $p \in]0, 1[$).
Sachant qu'on a examiné les quatre premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité que l'objet se trouve dans le cinquième ?

Exercice n°5
On jette deux fois une pièce équilibrée. On considère les évènements correspondants respectivement à l'obtention de : A : « pile la première fois », B : « face la deuxième fois » et C : « deux fois le même côté de la pièce ». Etudiez l'indépendance des évènements :
a) A et B **b)** B et C. **c)** C et A. **d)** A, B et C.

Exercice n°6
On jette un dé équilibré. On considère les évènements correspondants respectivement à l'obtention d'un nombre : A : « $\leqslant 3$ », B : « pair » et C : « 1, 2, 4 ou 5 ». Calculez $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
Les évènements A, B et C sont-ils indépendants ?

Exercice n°7 *(Oral 2 - CAPES 2010)*
Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue au hasard n tirages successifs ($n \geqslant 2$) d'une boule en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

1)a) Calculer la probabilité de l'évènement « toutes les boules tirées ont la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'évènement « on obtient exactement une boule blanche".

On considère les deux évènements A et B suivants :
A : « on obtient des boules des deux couleurs » B : « on obtient au plus une boule blanche »

2) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.

3) Montrer que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ si et seulement si l'entier n vérifie l'égalité $2^{n-1} = n + 1$.

4) En déduire qu'il existe une valeur unique de n pour laquelle A et B sont deux évènements indépendants (on pourra considérer la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ et montrer qu'elle est strictement croissante).

Exercice n°8 *(CAPES 2016 - deuxième composition)*
Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne et elle y est remplacée par une boule blanche, de sorte que le nombre N = 2+3 de boules dans l'urne reste constant. On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

1) Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2) On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

Exercice n°9

Ω désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ identifié à l'ensemble des triplets (a, b, c) où a, b et c sont des entiers tous distincts, égaux à 1, 2 ou 3. Ω est muni de la probabilité uniforme On pose :

$A = \{(a, b, c)|(a, b, c) \in \Omega \text{ et } a > b\} \quad B = \{(a, b, c)|(a, b, c) \in \Omega \text{ et } a > c\} \quad C = \{(a, b, c)|(a, b, c) \in \Omega \text{ et } b > c\}$

Les évènements A, B et C sont-ils indépendants ? Qu'en est-il des évènements A et $B \cap C$?

Exercice n°10

Soit deux évènements A et B, indépendants, de probabilités p et q. On pose $C = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$. Calculer p et q pour que A, B et C soient deux à deux indépendants. A, B et C sont-ils alors indépendants ?

Exercice n°11

A, B et C étant trois évènements, on dit que A et B sont indépendants conditionnellement à C si

$$P_C(A \cap B) = P_C(A)P_C(B)$$

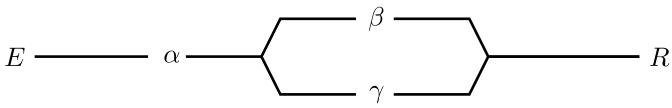
a) Montrez que si A, B et C sont indépendants, A et B sont indépendants conditionnellement à C. Que dire de la réciproque ?

b) Trouvez un exemple où A, B et C sont indépendants deux à deux mais où A et B ne sont pas indépendants conditionnellement à C.

Exercice n°12

Les composants α, β , γ du circuit ci-dessous sont sujets à pannes.

À un instant donné le fonctionnement de α, β, γ est aléatoire et l'état du circuit est décrit par un espace de probabilité discret (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.



On considère les évènements : A : « le composant α fonctionne » B : « le composant β fonctionne » C : « le composant γ fonctionne » S : « un signal électrique émis en E est reçu en R (c'est à dire qu'il existe un chemin de E à R le long duquel tous les composants fonctionnent) ».
L'observation de circuits semblables a permis les évaluations suivantes :

$$P(A) = 0,9 \qquad P_A(B) = 0,9 \qquad P_{A\cap\overline{B}}(C) = 0,5$$

1) Interprétez $P_{A\cap\overline{B}}(C)$.

2) Exprimez S à l'aide de A, B et C. Déduisez-en, par le calcul, une expression simplifiée de $S \cap (A \cap B)$ et l'égalité $S \cap \overline{A \cap B} = A \cap \overline{B} \cap C$

3) Calculez $P(A \cap B)$ et $P(A \cap \overline{B})$. Déterminez finalement $P(S)$.

Exercice n°13

Une puce saute sur les sommets d'un triangle ABC en suivant les règles suivantes :
- si elle se trouve en A elle saute en B avec probabilité 1/3, et saute en C avec probabilité 2/3,
- si elle se trouve en B elle reste en B avec probabilité 1/2, et saute en A avec probabilité 1/2,
- si elle se trouve en C elle saute en B avec probabilité 1/3, et reste en C avec probabilité 2/3.

Un saut a lieu à chaque seconde (instant). À l'instant 0, la puce se trouve en C.
On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement « la puce se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n ».

1) Traduire en notations mathématiques les données de l'énoncé.

2) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(C_1)$.

3) Donner une matrice Q de taille 3×3 telle que $(\mathbb{P}(A_{n+1}), \mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(C_{n+1})) = (\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n))\, Q$.

4) Montrer que Q a trois valeurs propres : 1 et deux valeurs propres distinctes de modules strictement inférieurs à 1 (calculer les valeurs propres).

5) En déduire que Q^n a une limite lorsque n tend vers l'infini ainsi que les quantités $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$.