Université de Rennes

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices de probabilités n°2

Probabilités sur un univers fini ou dénombrable

Exercice n°1

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable et P une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (A_1, A_2) \in (\mathscr{P}(\Omega))^2 \quad (A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2))$$

Montrez que si $(A_i)_{i=1}^n$ est une famille de parties de Ω vérifiant : $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ alors on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Révisions n°1

- Qu'appelle-t-on espace probabilisable ? Rappeler le vocabulaire des évènements.
- Quelle est la définition d'une probabilité sur un espace probabilisable ?
  $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ étant un espace probabilisé et A et B étant deux évènements, montrer que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- Comment construire une probabilité lorsque Ω est fini ou dénombrable ?
  Lorsque Ω est fini, détailler le cas de l'équiprobabilité (probabilité uniforme). Donner des exemples simples de situations dont la modélisation fait intervenir la probabilité uniforme.

Exercice n°2

A, B et C désignent trois évènements correspondants à une même expérience aléatoire. Exprimer à l'aide de A, B et C les faits :

1) aucun évènement n'est réalisé **2)** au plus deux le sont **3)** au moins un l'est
4) exactement un l'est **5)** A et B le sont mais pas C **6)** ni A ni B ne le sont

Exercice n°3

1) Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B, C) \in (\mathscr{P}(\Omega))^3$.
Montrer que $A \cup B = A \cup (B \backslash (A \cap B))$ et décomposer de même $A \cup B \cup C$ en réunion disjointe.
En déduire que $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
Généraliser ce résultat.

2) Déterminer la probabilité pour qu'au bridge (quatre joueurs, jeu de 52 cartes) au moins l'un des joueurs ait 13 cartes de la même couleur (piques, coeurs, carreaux, ou trèfles).

Exercice n°4

On lance cinq dés à six faces parfaitement équilibrés et l'on observe les différents chiffres obtenus.

1) Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience.

2) Décrire l'évènement « Trois dés exactement tombent sur 2 » au moyen du modèle de la question précédente.

3) Calculer la probabilité de l'évènement de la question précédente.

Exercice n°5 *(Oral 2 - CAPES 2018)*
On choisit au hasard un nombre entier de 0 à 999.
Quelle est la probabilité qu'au moins un de ses chiffres soit strictement supérieur à 5 ?

Exercice n°6 *(CAPES 2022 - Première composition)*
Vrai ou Faux.
Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type « VRAI - FAUX ».

1) La probabilité qu'il ait cinq réponses correctes est égale à $\dfrac{1}{32}$.

2) La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$

Exercice n°7 *(Oral 2 - CAPES 2019)*
À Florence au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle, un jeu consistait à jeter trois dés et à miser sur le résultat de la somme des trois dés. Durant sa jeunesse Cosme II de Médicis, grand-duc de Toscane, a observé de nombreuses parties : il a remarqué qu'il était préférable de miser sur le nombre 10.
Un de ses fidèles disciples lui affirma : « Maître excusez-moi de vous contredire mais le 9 apparaît plus souvent que le 10 ». Lequel des deux a raison ?

Exercice n°8 *(CAPES 2020 - Deuxième composition)*
Un problème historique dû au Chevalier de Méré est rapporté dans la correspondance entre Pascal et Fermat. Grand joueur, le chevalier de Méré s'intéressait aux jeux de hasard sur lesquels il misait de l'argent. À l'issue de nombreuses parties, il avait constaté avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois un six en lançant quatre fois un dé à six faces et moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés. Ce résultat lui semblait en contradiction avec l'égalité des rapports 24 et 4 du nombre de lancers au nombre de faces.

1) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six à l'issue de 4 lancers d'un dé.

2) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double-six à l'issue de 24 lancers de deux dés.

Exercice n°9

Montrer que la donnée des $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice n°10 *(CAPES 2021 - Première composition)*
Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

Exercice n°11 *(Tirages avec et sans remise)*
Soit M un ensemble (population) à r éléments (individus) et $n \geqslant 1$. On pose

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = M^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ \forall i \in \{1, \cdots n\},\ x_i \in M\}\\
&\Omega_2 = \{(x_1, \cdots, x_n),\ \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ x_i \in M \text{ et } x_i \neq x_j\}\\
&\Omega_3 = \{\omega \in \mathscr{P}(M),\ \mathrm{Card}(\omega) = n\}
\end{aligned}$$

et pour $k \in \{1,2,3\}$ on pose $\mathbb{P}_k$ la probabilité uniforme sur Ω_k.

1) Pour $k \in \{1,2,3\}$, calculer $\mathrm{Card}(\Omega_k)$.

2) Indiquer quels couples $(\Omega_k, \mathbb{P}_k)$ conviennent pour modéliser n tirages au hasard dans M (prélèvement d'un n-échantillon dans M) dans le cas de tirages : **a)** avec remise **b)** sans remise.

3) Lorsque deux couples conviennent, expliciter une relation de compatibilité entre les deux modèles.

Soit M_1 un sous-ensemble (sous-population) de M à r_1 éléments. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on considère l'évènement E_k : « le n-échantillon contient k individus de la sous-population M_1 »

4) Pour chacun des modèles envisagés ci-dessus, c'est à dire pour $i \in \{1, 2, 3\}$, écrire E_k comme un sous-ensemble E_i^k de Ω_i et calculer $\mathbb{P}_i(E_i^k)$.

5) r est connu et on cherche à estimer r_1 par sondage. Plus précisément, on prélève au hasard dans M un n-échantillon avec remise. Soit k, $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre d'individus de M_1 contenus dans cet échantillon. En étudiant $\mathbb{P}(E_1^k)$ comme fonction de r_1/r, déterminer l'entier $\widehat{r_1}$ pour lequel cette probabilité est maximum. $\widehat{r_1}$ est ***l'estimateur du maximum de vraisemblance*** pour le paramètre r_1.

Exercice n°12

Une urne contient n boules blanches (n entier non nul), deux boules noires et trois boules rouges. On extrait simultanément deux boules de l'urne (tirages équiprobables).

1) Calculer la probabilité d'obtenir :
a) deux boules noires **b)** au moins une boule blanche **c)** deux boules de couleurs différentes

2) Déterminer n pour que la probabilité d'obtenir « aucune boule blanche » soit de $2/11$.

Exercice n°13

On fait n choix au hasard, indépendants, d'un entier entre 0 et 9. Déterminez le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins un 7 soit plus grande que $\dfrac{9}{10}$.

Exercice n°14

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules rouges, trois blanches et neuf bleues. On tire au hasard et simultanément trois de ces boules.

1) Modéliser l'expérience.

2) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « On obtient au moins une boule blanche ». B : « On obtient une boule de chaque couleur ».

Exercice n°15 *(Oral 2 - CAPES 2010)*

On place dans une urne cent billets de loterie dont seulement deux sont gagnants.

1) Un joueur achète deux billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.

a) Quelle est la probabilité de ne pas gagner ?

b) En déduire la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.

2) Soit n un entier ($n \geqslant 2$). Un joueur achète n billets, qu'il tire simultanément dans l'urne. Soit A_n l'évènement : « Avoir un ou deux billet(s) gagnant(s) en achetant n billets ».

a) Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A_n}$, évènement contraire de A_n.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$ est :

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \frac{(100-n)(99-n)}{100 \times 99}$$

c) Quel est le nombre minimum n_0 de billets à acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$?

Exercice n°16

On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de treize cartes : neuf noires et quatre rouges. A-t-on plus d'une chance sur deux de tirer deux noires ?

Exercice n°17 *(Oral 2 - CAPES 2012)*

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un est rouge et l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.
Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 4.
Le dé noir porte sur ses faces les numéros : 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5.

1) Combien y a-t-il d'issues ? Sont-elles équiprobables ?

2) Obtient-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

Exercice n°18 *(Mayotte 2021 - Deuxième composition)*

Une entreprise fabrique des boîtes en bois qui ne peuvent présenter que deux défauts : un défaut d'aspect et un défaut de dimensions. À la suite d'un contrôle qualité de la fabrication, on constate que :

- 91% des boîtes fabriquées n'ont pas de défaut d'aspect ;
- parmi les boîtes n'ayant pas de défaut d'aspect, 96% n'ont pas de défaut de dimensions ;
- 3% des boîtes fabriquées présentent les deux défauts.

On prélève au hasard une boîte dans la production. On définit l'évènement A : « la boîte ne présente pas de défaut de dimensions ». Calculer la probabilité de l'évènement A.